UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

GEOMETRIA PLANA: CURIOSIDADE E EXERCÍCIOS PRÁTICOS

MAURÍCIO DOS SANTOS

Florianópolis – Agosto/2006

MAURÍCIO DOS SANTOS

Orientador: Nereu Estanislau Burin

Trabalho de Conclusão do Curso

de Licenciatura em Matemática

Florianópolis – Agosto/2006

Esta monografia foi julgada adequada para TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 27/CCM/06.

Profª Carmem Suzane Comitre Gimenez

Professora da Disciplina

Banca Examinadora:

Nereu E. Burin

Nereu Estanislau Burin

Orientador

Joana B. O. Quandt

Joana Benedita de Oliveira Quandt

Méricles Thadeu Moretti

SUMÁRIO

1. ***INTRODUÇÃO***

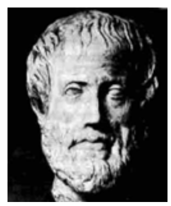
Inicialmente será relatado um pouco da história da Geometria Plana, possível origem considerando alguns matemáticos que contribuíram para o seu desenvolvimento.

Divergências quanto a origem da geometria; a importância dos mensuradores egípcios tomando-se as grandes construções da época, como as pirâmides. E as primeiras afirmações precisas da história no que se refere à figuras curvilíneas. Será comentado sobre os papiros de Ahmes e Moscou, nossas principais fontes de informação. A importância da geometria para os babilônios antigos e as notáveis contribuições gregas. Também deduções sobre o comprimento da circunferência e sobre a área do círculo onde vários matemáticos antigos se perderam em frações para achar uma aproximação mais exata para o número π .

No desenvolvimento serão apresentados alguns tópicos da Geometria Plana, como o uso de triângulos retângulos, relações métricas e semelhanças. É dada importância também ao teorema de Pitágoras além dos triângulos pitagóricos, com uma curiosidade sobre o tema envolvendo as Relações de Fibonacci. Além disso, focalizaremos as áreas das superfícies planas mais simples, demonstrando as fórmulas destas áreas que são estudadas no ensino fundamental e médio. Neste trabalho serão apresentados também alguns exemplos ao final de cada etapa.

2. Origens da Geometria

Afirmações sobre as origens da matemática, seja da aritmética seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. Foi somente nos últimos seis milênios, numa carreira que pode ter coberto milhares de milênios, que o homem se mostrou capaz de por seus registros e pensamentos em forma escrita. Para informações sobre a pré-história dependemos de interpretações baseadas nos poucos artefatos que restaram, de evidência fornecida pela moderna antropologia, e de extrapolação retroativa, conjetural, a partir dos documentos que sobreviveram.



Heródoto e **Aristóteles** (*foto acima*) não quiseram se arriscar a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas é claro que a geometria que tinham em mente tinha raízes mais antigas. Heródoto mantinha que a geometria se originava no **Egito**, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio. Aristóteles achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da geometria. Podemos considerar as idéias de Heródoto e Aristóteles como representando duas teorias opostas quanto às origens da matemática, um acreditando que a origem fosse a necessidade prática, outro que a origem estivesse no lazer sacerdotal e ritual. O fato dos geômetras egípcios serem às vezes chamados "estiradores de corda" (ou agrimensores) pode ser tomado como apoio de qualquer das duas teorias, pois cordas eram indubitavelmente usadas tanto para traçar as bases de templos como para realinhar demarcações apagadas de terras. Não podemos contradizer com segurança nem Heródoto nem Aristóteles quanto à motivação que produziu a matemática, mas é claro que ambos subestimaram a idade do assunto. O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que em essência são partes da geometria elementar. Além disso seqüências simples em desenhos sugerem uma espécie de teoria dos grupos aplicada bem como proposições geométricas e aritméticas. Para o período pré-histórico não há documentos, portanto é impossível acompanhar a evolução da matemática desde um desenho específico até um teorema familiar. Mas idéias são como sementes resistentes, e às vezes a origem presumida de um conceito pode ser apenas a reaparição de uma idéia muito mais antiga que ficara esquecida. A preocupação do homem pré-histórico com configurações e relações pode ter origem em seu sentimento estético e no prazer que lhe dava a beleza das formas, motivos que muitas vezes propelem a matemática de hoje. Gostaríamos de pensar que ao menos alguns dos antigos geômetras trabalharam pela pura satisfação de fazer matemática, não como auxílio prático à mensuração; mas há outras alternativas. Uma é que a geometria, como a contagem, tivesse origem em rituais primitivos. Os mais antigos resultados geométricos encontrados na Índia formam o que se chamou os *Sulvasutras*, ou “regras da corda”. Tratava-se de relações simples que aparentemente se aplicavam à construção de templos e altares. Pensa-se usualmente que a motivação geométrica dos “estiradores de corda” no Egito era mais prática do que a dos seus colegas na Índia; mas sugeriu-se que tanto a geometria da Índia como a egípcia podem provir de uma fonte comum — uma protogeometria relacionada com ritos primitivos mais ou menos do modo como a ciência se desenvolveu a partir da mitologia e a filosofia da teologia. Devemos ter em mente que a teoria da origem da geometria numa secularização de práticas rituais não está de modo nenhum provada. O desenvolvimento da geometria pode também ter sido estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras, ou por sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem. Podemos fazer conjeturas sobre o que levou os homens da Idade da Pedra a contar, medir e desenhar. Que os começos da matemática são mais antigos que as mais antigas civilizações, é claro. Ir além e identificar categoricamente uma origem determinada no espaço e no tempo, no entanto, é confundir conjetura com história. É melhor suspender o julgamento nessa questão e ir adiante, ao terreno mais firme da história da matemática encontrada em documentos escritos que chegaram até nós.

O historiador grego Heródoto nos diz que o apagamento das demarcações pelas inundações do Nilo tornou necessários os mensuradores. Os conhecimentos dos "estiradores de corda" egípcios eram evidentemente admirados por Demócrito, um matemático de competência e um dos fundadores de uma teoria atômica, e hoje suas realizações parecem ser demasiado valorizadas, em parte em conseqüência da precisão admirável da construção das pirâmides. Diz-se freqüentemente que os egípcios antigos conheciam o teorema de Pitágoras, mas não há traço disto nos papiros que chegaram até nós. Há no entanto alguns problemas geométricos no Papiro Ahmes[1]. O problema 51 mostra que a área de um triângulo isósceles era achada tomando a metade do que chamaríamos base e multiplicando isso pela altura. Ahmes justifica seu método para achar a área sugerindo que o triângulo isósceles pode ser pensado como dois triângulos retângulos, um dos quais pode ser deslocado de modo que os dois juntos formam um retângulo. O trapézio isósceles é tratado de modo semelhante no problema 52, em que a base maior é 6, a menor é 4, e a distância entre elas é 20. Tomando a metade da soma das bases, "de modo a fazer um retângulo", Ahmes multiplica isso por 20 para achar a área. Em transformações como essa, em que triângulos e trapézios isósceles são transformados em retângulos, vemos o início de uma teoria de congruências e da idéia de prova em geometria, mas os egípcios não foram além. Uma deficiência séria em sua geometria era a falta de uma distinção claramente estabelecida entre relações que são exatas e as que são apenas aproximações. Um documento de Edfu (*cidade egípcia*) que se preservou, datando de cerca de 1500 anos depois de Ahmes, dá exemplos de triângulos, trapézios, retângulos e quadriláteros mais gerais; a regra para achar a área do quadrilátero geral é fazer o produto das medidas aritméticas de lados opostos. Imprecisa como é a regra, o autor do documento deduziu dela um corolário — que a área de triângulo é a metade da soma de dois lados multiplicada pela metade do terceiro lado. Este é um notável exemplo de busca de

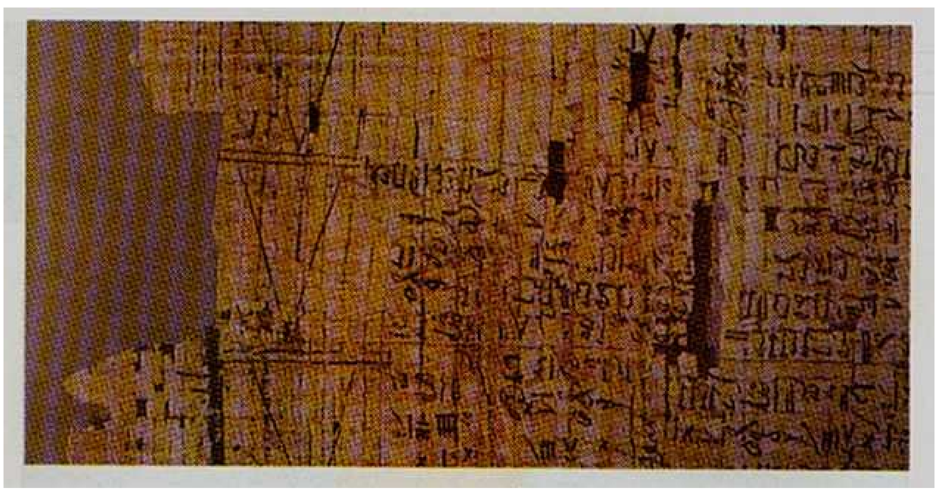
1. "Um certo número de papiros egípcios de algum modo resistiu ao desgaste do tempo por mais de três e meio milênios. O mais extenso dos de natureza matemática é um rolo de papiro com cerca de 0,30 m de altura e 5 m de comprimento, que está agora no British Museum (exceto uns poucos fragmentos, que estão no Brooklin Museum). Foi comprado em 1858 numa cidade à beira do Nilo, por um antiquário escocês, Henry Rhind; por isso é conhecido como *Papiro Rhind*, ou, menos freqüentemente, chamado **Papiro Ahmes** em honra do escriba que o copiou por volta de 1650 a.C."

relações entre figuras geométricas, bem como de uso do conceito de zero como substituto de uma grandeza na geometria.

A regra egípcia para achar a área do círculo tem sido considerada um dos maiores sucessos da época. No problema 50 o escriba Ahmes assume que a área de um campo circular com diâmetro de nove unidades é a mesma de um quadrado com lado de oito unidades. Comparando com a fórmula moderna $A = \pi r^2$ vemos que a regra egípcia equivale aproximadamente a atribuir a π o valor 31/6 uma aproximação bastante elogiável; mas novamente não há sinal de que Ahmes soubesse que as áreas de seu círculo e seu quadrado não eram *exatamente iguais*. É possível que o problema 48 dê alguma sugestão sobre como os egípcios chegaram à sua área do círculo. Nesse problema o escriba formou um octógono a partir de um quadrado de lado nove unidades dividindo os lados em três e cortando os quatro triângulos isósceles dos cantos, cada um tendo área 4 1/2 unidades. A área do octógono, que não difere muito da de um círculo inscrito no quadrado, é sessenta e três unidades, o que não está longe da área do quadrado com lado de oito unidades. Que o número $4\,(8/9)^2$ desempenhava papel comparável ao de nossa constante π parece ser confirmado pela regra egípcia para calcular a circunferência do círculo, segundo a qual a razão da área de um círculo para a circunferência é igual à da área do quadrado circunscrito para seu perímetro. Essa observação representa uma relação geométrica muito mais precisa e matematicamente significativa do que a aproximação relativamente boa para π. O grau de precisão na aproximação não é afinal, uma boa medida das realizações matemáticas ou arquitetônicas, e não devemos dar ênfase demais a esse aspecto da obra dos egípcios. A percepção de inter-relações entre figuras geométricas, revelada pelos egípcios, foi, de outro lado, muito freqüentemente esquecida. No entanto, é aqui que eles mais se aproximaram da atitude de seus sucessores, os gregos. Não se conhece teorema ou demonstração formal na matemática egípcia, mas algumas comparações geométricas feitas no vale do Nilo, como essas sobre perímetros e áreas de círculos e quadrados, estão entre as primeiras afirmações precisas da história, referentes a figuras curvilíneas.

Durante muito tempo se supôs que os gregos aprenderam os rudimentos de geometria com os egípcios, e Aristóteles argüiu que a geometria teria surgido no vale do

Nilo porque lá os sacerdotes tinham o lazer necessário para desenvolver o conhecimento teórico. Que os gregos de fato emprestaram do Egito alguma matemática elementar é provável, pois o uso de frações unitárias persistiu na Grécia e em Roma até boa parte do período medieval, mas evidentemente a extensão desse empréstimo foi exagerada. O conhecimento revelado nos papiros é quase todo prático e o elemento principal nas questões eram cálculos. Quando parecem entrar elementos teóricos, o objetivo pode ter sido o de facilitar a técnica e não a compreensão. Mesmo a geometria egípcia, outrora louvada, aparece na verdade mais como um ramo da aritmética aplicada. Onde entram relações de congruência elementares, o motivo aparentemente é o de fornecer artifícios de mensuração e não o de conseguir melhor compreensão. As regras de cálculo raramente são motivadas e dizem respeito apenas a casos concretos específicos.

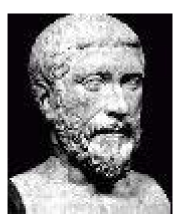


Os papiros de **Ahmes** (*foto acima*) e Moscou, nossas principais fontes de informação, podem ter sido apenas manuais destinados a estudantes, mas indicam a direção e as tendências do ensino de matemática no Egito; outras evidências fornecidas por inscrições sobre monumentos, fragmentos de outros papiros matemáticos, e documentos de ramos aparentados da ciência servem para confirmar a impressão geral. É verdade que nossos dois principais papiros matemáticos são de época bastante antiga, mil anos antes do surgimento da matemática grega, mas a egípcia parece ter permanecido notavelmente uniforme durante sua longa história. Em todos os seus estágios, era construída em torno da operação de adição, uma desvantagem que conferia aos cálculos dos egípcios um peculiar primitivismo, combinado com uma ocasional e assombrosa complexidade. O fértil vale do Nilo tem sido descrito como o maior oásis do mundo no maior deserto do mundo. Regado por um dos rios mais "bem-educados" do mundo e geograficamente protegido em larga extensão da invasão estrangeira, era um abrigo para um povo pacífico que levava uma vida calma e sem desafios. O amor aos deuses benevolentes, o respeito à tradição, a preocupação com a morte e as necessidades dos mortos, tudo isso encorajou um alto grau de estagnação. A geometria pode ter sido uma dádiva do Nilo, como Heródoto acreditava, mas os egípcios pouco a aproveitaram. A matemática de Ahmes era a de seus antepassados e descendentes. Para realizações matemáticas mais progressistas devemos examinar o vale fluvial mais turbulento conhecido como Mesopotâmia.

Até alguns anos atrás costumava-se dizer que os babilônios eram melhores que os egípcios na álgebra mas que tinham contribuído menos na geometria. A primeira metade da afirmação é confirmada; tentativas de justificar a segunda metade da comparação se limitam em geral à medida do círculo ou ao volume do tronco de pirâmide. No vale mesopotâmio a área do círculo era achada em geral tomando três vezes o quadrado do raio, e em precisão isso é bem inferior à medida egípcia. No entanto, a contagem de casas decimais nas aproximações para π não é uma medida adequada da estatura geométrica de uma civilização, e uma descoberta recente anulou até esse fraco argumento. Em 1936 um grupo de tabletas matemáticas foi desenterrado em Susa (*antiga cidade dos impérios babilônicos e persa*), a uns trezentos quilômetros da Babilônia, e essas incluem resultados geométricos significativos. Seguindo o gosto mesopotâmio de fazer tabelas e listas, uma tableta do grupo de Susa compara as áreas e os quadrados dos lados de polígonos regulares de três, quatro, cinco, seis e sete lados. A razão da área do pentágono, por exemplo, para o quadrado do lado é dada como 1 ; 40, um valor que está correto a dois algarismos significativos. Para o hexágono e heptágono as razões são expressas como 2 ; 37,30 e 3 ; 41 respectivamente. Na mesma tableta o escriba dá 0 ; 57,36 como razão entre o perímetro do hexágono regular e a circunferência do círculo circunscrito; e disso podemos concluir imediatamente que o escriba babilônio tinha tomado 3 ; 7,30 ou 3 1/8 como aproximação para π . Isso é pelo menos tão bom quanto o valor adotado no Egito. Além disso, nós o encontramos num contexto mais elaborado do que no Egito, pois a tableta de Susa é um bom exemplo de comparação sistemática de figuras geométricas. Fica-se quase tentado a ver nela a genuína origem da geometria, mas é importante notar que não era tanto o contexto geométrico que interessava aos babilônios quanto as aproximações numéricas que usavam na mensuração. A geometria para eles não era uma disciplina matemática no nosso sentido, mas uma espécie de álgebra ou aritmética aplicada em que números são ligados a figuras.

Há algum desacordo quanto a se os babilônios tinham ou não o conceito de figuras semelhantes, embora pareça provável. A semelhança de todos os círculos parece tomada como evidente na Mesopotâmia, como no Egito, e os muitos problemas sobre medidas de triângulos em tabletas cuneiformes parecem implicar uma noção de semelhança.

Medidas era o ponto central na geometria algebrizada do vale mesopotâmio, mas um defeito grave, como na geometria egípcia, era que a distinção entre medidas exatas e aproximadas não era tornada clara. A área de um quadrilátero era achada tomando o produto das médias aritméticas dos pares de lados opostos, sem nenhum aviso de que isso na maior parte dos casos era apenas uma aproximação grosseira. Também, o volume de um tronco de cone ou pirâmide era achado às vezes tomando a média aritmética das bases e multiplicando pela altura; às vezes, para um tronco de pirâmide quadrada com áreas a^2 e b^2 para as bases aplicava-se a fórmula $V = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 . h$. No entanto, para esse tronco os babilônios usavam também uma regra equivalente a $V = h\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]$, fórmula correta e que se reduz à conhecida pelos egípcios.



Não se sabe se os resultados egípcios e assírios eram sempre obtidos independentemente, mas de qualquer forma esses últimos foram decididamente maiores que os primeiros, tanto na geometria quanto na álgebra. O *teorema de **Pitágoras*** (*foto acima*), por exemplo, não aparece em forma nenhuma nos documentos egípcios encontrados, mas tabletas até do período babilônio antigo mostram que na Mesopotâmia o teorema era largamente usado. Um texto cuneiforme da coleção de Yale (*Universidade Americana*), por exemplo, contém um diagrama de um quadrado e suas diagonais em que o número 30 está escrito ao longo de um lado e os números 42 ; 25,35 e 1 ; 24,51,10 ao longo da diagonal. O último número é evidentemente a razão entre os comprimentos da diagonal e do lado, e está expressa tão precisamente que concorda com $\sqrt{2}$ a cerca de 1 milionésimo. A precisão do resultado foi possível graças ao conhecimento do teorema de Pitágoras. Às vezes, em cálculos menos precisos, os babilônios usavam 1 ; 25 como aproximação grosseira dessa razão. Mais significativa que a precisão dos valores, no entanto, é a implicação de que a diagonal de *qualquer* quadrado podia ser achada multiplicando o lado por $\sqrt{2}$. Assim, parece haver alguma idéia de princípios gerais, apesar de que esses são expressos exclusivamente em casos especiais.

O conhecimento babilônio do teorema de Pitágoras não se limitava ao caso do triângulo retângulo isósceles. Num texto babilônio antigo aparece um problema em que uma escada ou prancha de comprimento 0 ; 30 está apoiada a uma parede; a questão é, de quanto a extremidade inferior se afastará da parede se a superior escorregar para baixo de uma distância de 0 ; 6 unidades ? A resposta é encontrada corretamente usando o teorema de Pitágoras. Mil e quinhentos anos depois problemas semelhantes, alguns com novos requintes, ainda estavam sendo resolvidos no vale mesopotâmio. Textos de problemas antigos em cuneiforme fornecem grande número de problemas do que poderíamos chamar geometria, mas que os babilônios provavelmente consideravam como aritmética aplicada.

Os babilônios antigos conheciam outras importantes relações geométricas. Como os egípcios, sabiam que a altura de um triângulo isósceles bissecta a base. Daí, dado o comprimento de uma corda num círculo de raio conhecido, sabiam achar o apótema. Diferentemente dos egípcios, conheciam o fato que o ângulo inscrito num semicírculo é reto, proposição geralmente conhecida como teorema de Tales, apesar de Tales ter vivido bem mais de um milênio depois dos babilônios terem começado a usá-la. Esta denominação errônea de um teorema bem conhecida da geometria é sintomático da dificuldade em avaliar a influência da matemática pré-helênica sobre culturas posteriores. As tabletas cuneiformes tinham uma permanência que não podia ser igualada por documentos de outras civilizações, pois papiro e pergaminho não resistem bem aos estragos do tempo. Além disso, textos cuneiformes continuaram a ser incisos até o surgimento da era cristã; mas seriam eles lidos pelas civilizações vizinhas, especialmente os gregos ? O centro do desenvolvimento matemático estava se deslocando da Mesopotâmia para o mundo grego meia dúzia de séculos antes de nossa era, mas reconstruções da matemática grega primitiva são arriscadas devido ao fato de praticamente não restarem documentos matemáticos do período pré-helenístico. É importante por isso, ter-se em mente as características gerais da matemática egípcia e babilônia de modo a poder fazer-se ao menos conjeturas plausíveis quanto às analogias que possam tornar-se aparentes entre contribuições pré-helênicas e as atividades e atitudes de povos de período posterior.

"A palavra geometria é derivada do grego, com base no radical geõ de gé = terra e métron = medida. Ademais, há em grego clássico o verbo geõmétrin = medir a terra, ser agrimensor ou geômetra."

Os gregos herdaram dos babilônios e, habituados ao uso dos ângulos por sua longa experiência astronômica, introduziram muito cedo, na matemática, a idéia de ângulo, sabendo-se que na época clássica eram definidos apenas ângulos inferiores a dois retos, ou seja, menores que 180º.

Na Antigüidade, não existia clareza quanto a distinção entre as noções de deslocamentos e movimentos, como também a idéia geral de transformação, aplicada a todo espaço, mantém-se estranha ao pensamento matemático até o fim do século XVIII, sabendo-se, no entanto, que antes do século XVII não se encontra nenhum traço da noção de composição de movimentos, ou da composição de deslocamentos, não significando, porém, que os gregos não tenham sido particularmente sensíveis às ' regularidades ' e ' simetrias ' das figuras, ligadas atualmente à noção de grupo de deslocamentos. A sua teoria dos polígonos regulares e, mais ainda, a teoria dos poliedros regulares, certamente um dos mais notáveis capítulos de toda a matemática grega, prova o contrário.

A teoria das cônicas foi a última das contribuições essenciais dos gregos. Em face de não conhecerem as quádricas, eles não desenvolveram muito o seu estudo, com exceção da esfera, pois só tinham noção de certas quádricas de revolução.

Em face de toda a explanação apresentada até o momento, observamos que os gregos utilizavam corretamente, para o estudo de ' figuras ' particulares, as 'ordenadas ' em relação a dois ou mesmo mais de dois eixos no plano sem que jamais tenha tido a idéia do princípio fundamental da geometria analítica, devido a falta de conhecimentos de álgebra.

Naquela época, para medir superfícies, os sacerdotes observaram trabalhadores pavimentando com mosaicos quadrados, uma superfície retangular e concluíram que o total de mosaicos necessários para cobrir a superfície seria contar os de uma fileira e repetir esse número tantas vezes quantas fileiras houvesse, nascendo daí a fórmula da área do retângulo, ou seja, a área do retângulo é igual a base da superfície pela altura.

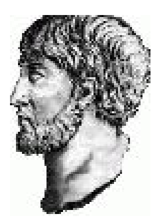
Seguindo um raciocínio geométrico, para calcular a área do triângulo, eles tomaram um quadrado ou um retângulo e dividiram em quadrados iguais. Suponhamos que o quadrado tenha 9 casas e o retângulo 12. Esses números exprimem então a área dessas figuras. Cortando o quadrado ou o retângulo em duas partes iguais, segundo uma linha diagonal, aparecem dois triângulos iguais.

Com respeito às superfícies irregulares da terra, o problema era resolvido, como é ainda hoje, pelo método da triangulação, ou seja: marcavam um triângulo e a partir dele, traçavam linhas a todos os demais triângulos visíveis de campo. Em face de muitos terrenos apresentarem o contorno de um morro ou o curso de um rio, suas bordas eram curvas ou não eram planos acarretando com isso pequenos erros que podia ser desprezível devido a grande quantidade de terras. Em conseqüência das irregularidades apresentadas, surgiram duas perguntas: Como determinar o comprimento da circunferência? e a área do círculo? Naquela época os geômetras sabiam que os círculos podiam ser traçados através de uma corda com uma de suas extremidades fixa em um ponto determinado e com a outra extremidade girava-se em torno do referido ponto. Sabiam, também, que o comprimento dessa corda, raio, relacionava-se com o comprimento da circunferência. Logo, puderam comprovar, após estender a corda sobre a circunferência, que o comprimento da circunferência era um pouco mais de seis vezes e um quarto. Daí, chegaram a conclusão final, afirmando-se o seguinte:

> **a** — O comprimento da circunferência é sempre de 6,28 vezes maior que o de seu raio;
>
> **b** — Para conhecer o comprimento de uma circunferência, basta conhecer o comprimento do raio e multiplicá-lo por 6,28.

Com respeito a área do círculo, explica-se que a cerca de 2.000 a.C., um escriba egípcio chamado Ahmes refletia diante do desenho de um círculo no qual havia traçado o raio. O escriba pensou em determinar a área de um quadrado e calcular quantas vezes essa área caberia na área do círculo e como conseqüência, comprovou que o quadrado que tinha como lado o raio do círculo estava contido entre 3 e 4 vezes no círculo. Daí concluiu que para saber a área do círculo, basta calcular a área de um quadrado construído sobre o raio e multiplicar a respectiva área por 3,14.

No papiro Rhind, que é um dos documentos mais antigos da história da matemática, encontramos um curioso processo de cálculo da circunferência, quando conhecemos o seu diâmetro. Daí deduzimos que os geômetras egípcios atribuíam ao número pi (π) um valor equivalente ao quadrado da fração 16/9 que daria, em número decimal, 3,1605 — valor no qual π apresenta um erro que não chega a dois centésimos de unidade.



No século III a.C., **Arquimedes** (*foto acima*) provou que o número famoso deveria estar compreendido entre as frações 3 1/7 e 3 10/71 e Bháskara, geômetra indiano, admitia para o número π um valor expresso pelo número 3 17/120 que equivalia ao número decimal 3,1416.

Ao matemático holandês Adrian Anthonisz, apelidado Metius, os historiadores atribuem o valor 355/113 para o número π, que foi de largo emprego durante os séculos XVI e XVII.

O alemão Johann Heinrich Lambert teve a paciência de obter para o valor de π uma fração ordinária, cujo numerador tinha dezesseis algarismos e o denominador quinze, conforme consta no livro " Scripta Mathematica ", 1944, vol. X, pág. 148.

Para a fixação de um valor aproximado de π (em número decimal), por meio de um artifício mnemônico, há várias frases dentre elas está a do matemático francês Maurice Decerf, grande pesquisador de curiosidades que escreveu um pequeno poema no qual, cada palavra, pelo número de letras que encerra, corresponde a um algarismo do número π, em decimal, ou seja π = 3, 14 159 265 358 979.

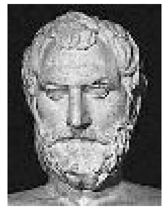
> Que j'aime à faire connaître um nombre utile
> aux sages Glorieux Archimède artiste ingenieux.

Existe ainda, a frase em português " Sou o medo e temor constante do menino vadio " correspondente ao número π com oito decimais.

Como podemos observar, o número π é um dos mais famosos em todos os quadrantes da matemática pois os geômetras da Antigüidade já o conhecia inclusive a constância de seu valor; levando-se a afirmar que conforme podemos concluir as duas citações bíblicas, bem claras, que os judeus primitivos, atribuíram ao referido número um valor inteiro igual a 3. No Livro dos Reis podemos ler, realmente, esta curiosa indicação:

> " Fez também o mar de fundição redondo de dez côvados de
> uma borda à outra e de cinco de alto; um fio de trinta côvados
> era a medida de sua circunferência. "

Esse mar de fundição, esclarece o exegeta, não passava de um pequeno poço (de acordo com o costume egípcio), onde os padres se banhavam. Tendo o tal poço redondo trinta côvados de roda, o seu diâmetro (medido de uma borda à outra) era de 10 côvados. A relação entre a circunferência(30) e o diâmetro (10) é exatamente igual a 3, valor revelado pela Bíblia e é o valor de **π.**



Com o intercâmbio comercial, esses conhecimentos geométricos passaram para os habitantes da península e ilhas gregas acerca de 800 a.C., dando início a um grande movimento de caráter cultural, com reflexos até na língua grega. As ciências receberam dos gregos as primeiras tentativas de sistematização. **Thales de Mileto** (*foto acima*) provou que algumas propriedades das figuras geométricas podiam ser deduzidas de outras. Pitágoras deu novo impulso à pesquisa de relações lógicas entre as proposições matemáticas, e é considerado por alguns como o pai da sistematização da matemática. Sucessores de Pitágoras, como Hipócrates de Quios, Platão, Aristóteles e outros, deram grande contribuição para o desenvolvimento da geometria e para sua organização como ciência. Ficou célebre a inscrição que Platão mandou colocar na entrada de sua academia: "Quem não for geômetra não entre". Deve-se a Aristóteles, freqüentador assíduo da Academia de Platão, a divisão das proposições de qualquer ciência em dois tipos: primárias e secundárias. As primárias são aquelas aceitas sem prova, ou evidentes (axiomas) ou tomadas como verdadeiras (postulados). As secundárias são as proposições deduzidas das anteriores mediante raciocínio lógico (teoremas).

Chegamos ao Século de Ouro com o geômetra grego que nasceu em 330 a.C. e morreu em 275 a.C.. Estudou em Atenas com os sucessores de Platão dedicando-se brilhantemente ao ensino da matemática e atraindo para as suas lições públicas, como era de uso entre os atenienses, um grande número de discípulos. Esse gênio da matemática cuja figura irradiava simpatia e bondade, de caráter modesto e gentil, orientando, com tolerância a benevolência, sempre àqueles que podiam contribuir para o desenvolvimento da matemática, não poderia deixar de ser Euclides.

Foi o primeiro e grande didata da matemática e sua obra principal é denominada "Os elementos" que alcançou mais 1.500 edições, constituindo-se, sem dúvida, no começo do século XX, a obra mais difundida depois da Bíblia. A primeira edição árabe surgiu no século VIII, devida a Al-Hajjaj Bem Yusuf Ben Matar, tendo aparecido a versão latina em 1.120, de autoria do filósofo inglês Adelard de Bath (também chamado Aethelard de Bath).

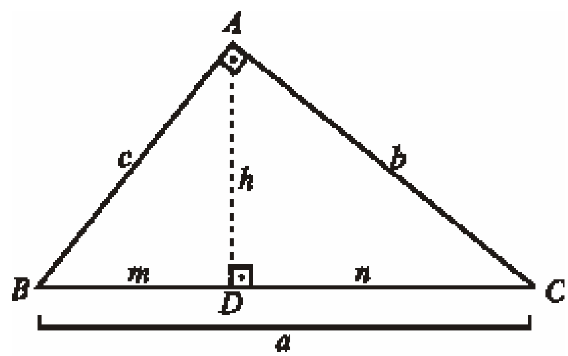
O tratado do célebre geômetra grego compõe-se de treze livros ou capítulos e a esses livros, na parte final, foram acrescentados mais dois, o de número XIV de autoria de Hipsicles de Alexandria (séc. II a.C.) e o de número XV, de autor desconhecido; ambos tratam das novas propriedades dos polígonos e poliedros regulares.

3. *TRIÂNGULOS RETÂNGULOS*

3.1. Relações Métricas nos Triângulos Retângulos

*** Elementos**

Considerando um triângulo *ABC*, retângulo em A, e conduzindo $\overline{AD}$ perpendicular a $\overline{BC}$, com D em $\overline{BC}$, vamos caracterizar os elementos seguintes:



$\overline{BC}$ = a : hipotenusa,

$\overline{AC}$ = b : cateto,

$\overline{AB}$ = c : cateto,

$\overline{BD}$ = m : projeção do cateto c sobre a hipotenusa,

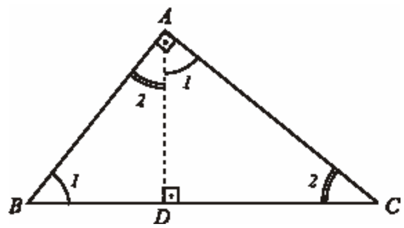
$\overline{CD}$ = n : projeção do cateto b sobre a hipotenusa,

$\overline{AD}$ = h : altura relativa à hipotenusa.

Note que para simplificar, confundimos um segmento com a sua medida. Assim, dizemos que a é a hipotenusa, podendo ser entendido que a é a *medida* da hipotenusa.

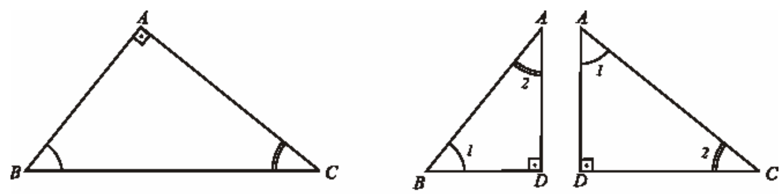
*** Semelhanças**

Conduzindo a altura $\overline{AD}$ relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo *ABC*, obtemos dois triângulos retângulos *DBA* e *DAC* semelhantes ao triângulo *ABC*.



De fato, devido à congruência dos ângulos indicados na figura acima, $\hat{B} \equiv \hat{1}$ (complementos de $\hat{C}$) e $\hat{C} \equiv \hat{2}$ (complementos de $\hat{B}$), temos:

$\Delta ABC \sim \Delta DBA$ $\qquad$ $\Delta ABC \sim \Delta DAC$ $\qquad$ $\Delta DBA \sim \Delta DAC$

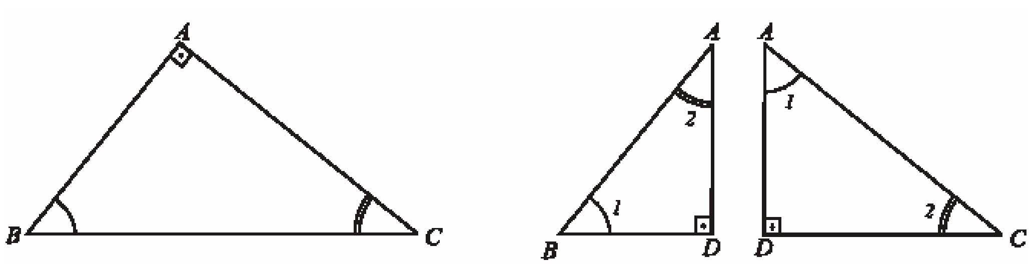


pois eles possuem dois ângulos congruentes.

Logo: $\qquad \Delta ABC \sim \Delta DBA \sim \Delta DAC$

* *Relações Métricas*

Com base na semelhança dos triângulos citados no item anterior e com os elementos já caracterizados:



(1) $\qquad$ (2) $\qquad$ (3)

→ *<u>Definição</u>*: *Média Proporcional* dos segmentos *r* e *s* dados é o segmento **x** que, com os segmentos dados, forma as seguintes proporções:

$$\frac{r}{x} = \frac{x}{s} \quad , \text{ ou } , \quad \frac{x}{r} = \frac{s}{x}$$

Dessas proporções segue que: $x^2 = r \,.\, s$ ou ainda $x = \sqrt{r \,.\, s}$

→ *<u>Definição</u>*: *Média Geométrica* entre **n** números racionais não negativos, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ é a raiz n-ésima do produto entre esses números, ou seja, $x = \sqrt[n]{x_1 \,.\, x_2 \ldots x_n} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$

Então, vemos que a média proporcional de r e s coincide com a média geométrica de r e s.

Assim sendo, para qualquer triângulo retângulo, temos que:

- 1º) Cada cateto é média proporcional (ou média geométrica) entre sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa.

→ Da semelhança entre **(1)** e **(2)**, temos que: $\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow \boxed{\mathbf{c^2 = a \,.\, m}}$

→ Da semelhança entre **(1)** e **(3)**, temos que: $\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow \boxed{\mathbf{b^2 = a \,.\, n}}$

- 2º) A altura relativa à hipotenusa é média proporcional (ou média geométrica) entre os segmentos que determina sobre a hipotenusa.

→ Da semelhança entre **(2)** e **(3)**, temos que: $\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow \boxed{\mathbf{h^2 = m \,.\, n}}$

- 3º) O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.

→ Da semelhança entre **(1)** e **(2)**, temos que: $\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow \boxed{\mathbf{a \cdot h = b \cdot c}}$

→ Da semelhança entre **(1)** e **(3)**, temos que: $\frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c$

- 4º) O produto de um cateto pela altura relativa à hipotenusa é igual ao produto do outro cateto pela projeção do primeiro sobre a hipotenusa.

→ Da semelhança entre **(1)** e **(3)**, temos que: $\frac{b}{n} = \frac{c}{h} \Rightarrow \boxed{\mathbf{b. h = c \cdot n}}$

→ Da semelhança entre **(2)** e **(3)**, temos que: $\frac{c}{b} = \frac{h}{n} \Rightarrow b \cdot h = c \cdot n$

→ Da semelhança entre **(2)** e **(3)**, temos que: $\frac{c}{b} = \frac{m}{h} \Rightarrow \boxed{\mathbf{c. h = b \cdot m}}$

3.2. Teorema de Pitágoras

A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

$$b^2 + c^2 = a^2$$

* *Demonstração*

Para provar esta relação basta somar membro a membro as duas primeiras relações encontradas, como segue:

$$\left.\begin{aligned} b^2 &= a\ .\ n \\ c^2 &= a\ .\ m \end{aligned}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} \quad b^2 + c^2 = am + an \quad \Rightarrow \quad b^2 + c^2 = a\,(m + n)$$

Porém $m + n = a$, logo: $b^2 + c^2 = a^2$

Assim, confirma-se que a *soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa*.

Observação$_1$: As três primeiras relações métricas obtidas nos enunciados acima são as mais importantes. Pois delas decorrem todas as outras.

Então, temos: $b^2 = a\ .\ n$, $c^2 = a\ .\ m$ e $h^2 = m\ .\ n$ (as principais)

Fazendo a 1ª x 2ª , membro a membro, e usando a 3ª:

$$b^2\ .\ c^2 = an\ .\ am \;\Rightarrow\; b^2\ .\ c^2 = a^2\ .\ \mathbf{mn} \;\Rightarrow\; b^2\ .\ c^2 = a^2\ .\ \mathbf{h^2} \;\Rightarrow\; b\ .\ c = a\ .\ h$$

Observação$_2$: Num triângulo retângulo, a soma dos inversos dos quadrados dos catetos é igual ao inverso do quadrado da altura relativa à hipotenusa, ou seja:

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

Utilizando-se a relação encontrada na *observação$_1$* que diz **b . c = a . h** , e então elevando-se ambos os membros ao quadrado, temos:

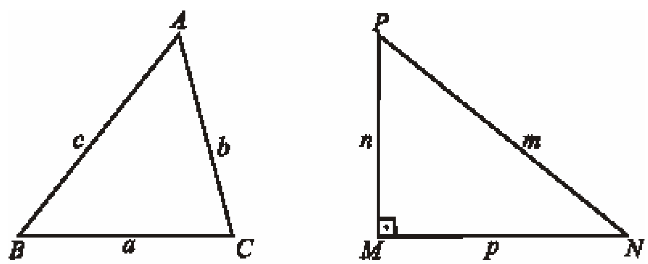
Prova: $\dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{c^2 + b^2}{c^2 .\, b^2} = \dfrac{a^2}{b^2 . c^2} = \dfrac{a^2}{a^2 .\, h^2} = \dfrac{1}{h^2}$ ■

Observação$_3$: Se num triângulo o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo é retângulo [*Recíproco do teorema de Pitágoras*]

hipótese *tese*

$$\Delta ABC \text{ em que } a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \Delta ABC \text{ é retângulo}$$

Demonstração: Construindo o triângulo MNP, retângulo em M e cujos catetos $\overline{MN}$ e $\overline{MP}$ sejam respectivamente congruentes a $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, temos:



ΔMNP retângulo em M $\Rightarrow$ $m^2 = n^2 + p^2$

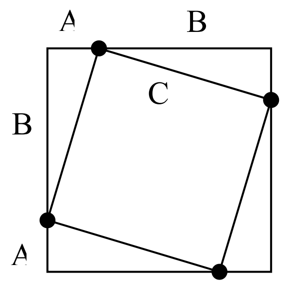
Como $n = b$ e $p = c$, vem que $m^2 = b^2 + c^2$.

Logo, $m^2 = a^2$, ou seja, $m = a$.

Então, pelo caso LLL, $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ e, como ΔMNP é retângulo em M, o ΔABC é retângulo em A. ■

◊ **<u>Outra demonstração do teorema de Pitágoras (*geométrica*)</u>**:

Pega-se um quadrado qualquer. Divida cada lado desse quadrado em duas partes diferentes, A e B, fazendo uma variação entre A e B em todos os lados. Una cada um dos pontos que dividem os segmentos A e B de cada lado. Dessa forma teremos um quadrado menor circundado por 4 triângulos retângulos iguais. Assim, temos que: [*sendo: $(A + B)^2$ a área do quadrado maior, C a hipotenusa dos triângulos retângulos formados e* $\frac{A \cdot B}{2}$ *a área do triângulo retângulo*]



$$(A + B)^2 = C^2 + 4 \cdot \left(\frac{A \cdot B}{2} \right)$$

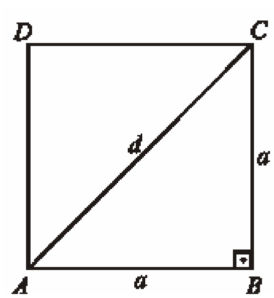
$$A^2 + 2AB + B^2 = C^2 + 2AB$$

$$\boxed{A^2 + B^2 = C^2}$$

3.3. APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

3.3.1. ***Diagonal do Quadrado***

Dado um quadrado de lado a , calcular sua diagonal d .

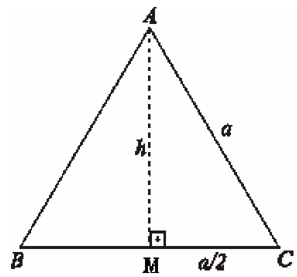


Sendo $ABCD$ o quadrado de lado a , aplicando o teorema de Pitágoras no ΔABC , temos:

$$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow \boxed{d = a\sqrt{2}}$$

3.3.2. *Altura do triângulo equilátero*

Dado um triângulo eqüilátero de lado a, calcular sua altura h.

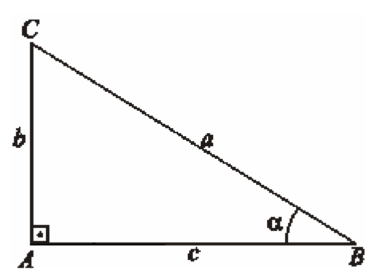


Sendo ABC um triângulo equilátero de lado a, M o ponto médio de $\overline{BC}$, calculamos $\overline{AM} = h$ aplicando o teorema de Pitágoras no ΔAMC.

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad h^2 = \frac{3a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

3.3.3. *Seno, cosseno e tangente de 30º, 45º e 60º*

Sendo α a medida de um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo:

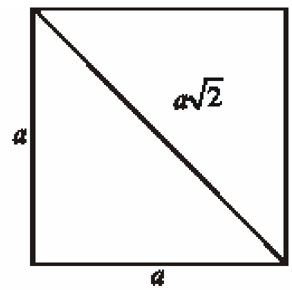


- seno de α = $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{a}$
- cosseno de $\alpha = \cos\alpha = \dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{c}{a}$

- tangente de α = tg α = $\dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \dfrac{b}{c}$

Logo, temos:

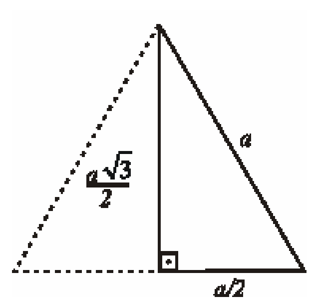
$$\text{sen } 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

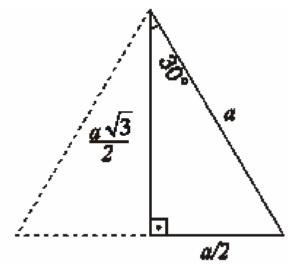
$$\text{sen } 60^\circ = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$



$$\cos 30^\circ = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

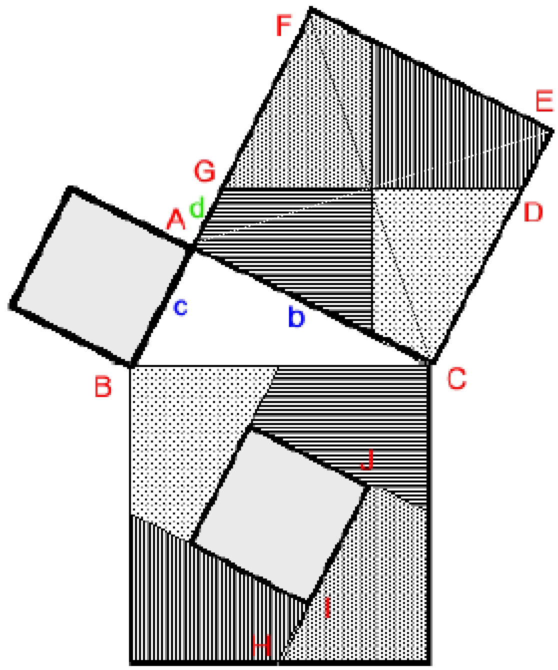
3.3.4. *A dissecção de Perigal*

O conhecido teorema de Pitágoras estabelece que, num triângulo retângulo ABC, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa $\overline{BC}$ é a soma das áreas dos quadrados cujos lados são, respectivamente, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

Uma demonstração curiosa desse resultado foi feita por Perigal e pode ser reconstruída como segue.

Primeiro, desenhe um triângulo retângulo ABC e depois desenhe os quadrados a que se refere o teorema, como na figura abaixo. Desenhe as diagonais do quadrado ACEF (tracejadas na figura) para determinar o centro do quadrado. Depois divida o quadrado em quatro partes iguais, traçando os segmentos de reta que passam pelo centro de ACEF e são paralelos aos lados do quadrado de lado $\overline{BC}$.

Recorte as quatro peças assim obtidas e encaixe-as no quadrado de lado $\overline{BC}$, sobrepondo os ângulos retos. No centro fica definido um quadrado exatamente do mesmo tamanho que o quadrado de lado $\overline{AB}$.



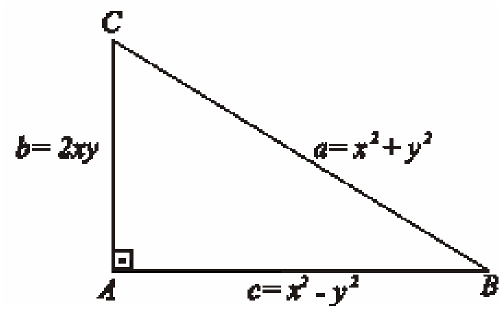
♦ Mas será que a figura quadrada no meio do quadrado de lado $\overline{BC}$ é realmente congruente ao quadrado menor (de lado $\overline{AB}$) ?

De fato, sejam $AC = b$ e $AB = c$ os lados dos quadrados construídos sobre os catetos. Como as quatro peças interiores ao quadrado *ACEF* são congruentes, $AG = DE = d$ como *BCDG* é um paralelogramo, pois BG = CD, ou seja, c + d = b – d, isto é, c = b – 2d. Além disso, HJ = GF = CD e HI = DE, portanto, IJ = HJ – HI = (b– d) – d = b – 2d = c .

3.3.5. *Triângulos Pitagóricos*

Veremos como obter triângulos retângulos cujos lados são medidos por números inteiros, triângulos estes chamados pitagóricos.

Calculemos a hipotenusa a de um triângulo retângulo com um cateto $b = 2xy$ e outro $c = x^2 - y^2$.



$$a^2 = (2xy)^2 + (x^2 - y^2)^2 = 4x^2y^2 + x^4 - 2x^2y^2 + y^4 \quad \Rightarrow \quad a^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$

$$\Rightarrow \quad a^2 = (x^2 + y^2)^2 \Rightarrow a = x^2 + y^2$$

Então, temos:

Tomando x e y inteiros, e x maior que y, vem a tabela:

		Cateto	Cateto	Hipotenusa
x	y	$x^2 - y^2$	$2xy$	$x^2 + y^2$
2	1	3	4	5
3	1	8	6	10
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	2	12	16	20
4	3	7	24	25
5	1	24	10	26
5	2	21	20	29
5	3	16	30	34
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37
6	2	32	24	40

6	3	27	36	45
6	4	20	48	52
6	5	11	60	61
7	2	45	28	53
7	4	33	56	65
:	:	:	:	:

Notemos que os triângulos retângulos cujos lados são dados pelo ternos:

a) (3, 4, 5), (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20) ... são semelhantes entre si;
b) (5, 12, 13), (10, 24, 26), (15, 36, 39), (20, 48, 52) ... são semelhantes entre si;
c) (8, 15, 17), (16, 30, 34), (24, 45, 51), (32, 60, 68) ... são semelhantes entre si, etc.

3.3.6. ***CURIOSIDADE***

Fibonacci ficou conhecido entre nós não exatamente por seus livros, mas porque no século XIX o matemático francês F. Edouard A. Lucas, na sua coleção *Récreations mathématique* (4 volumes, Gauthier-Villars, Paris 1891-1896 ; reeditado em Paris 1960), ligou o nome de Fibonacci à seqüência que aparece num problema do livro Liber Abaci. O problema, relacionado com o número de casais de coelhos obtidos a partir de um único casal, era :

"Quantos casais de coelhos podem ser produzidos a partir de um único casal durante um ano se cada casal originar um novo casal em cada mês, o qual se torna fértil a partir do segundo mês; e não ocorrerem mortes ?"

Nessas condições, um casal nasce no terceiro mês, totalizando-se assim 2 casais. Durante o quarto mês, o casal original produz um novo casal. Um mês depois, o casal original e o que nasceu imediatamente após o seu acasalamento, produzem novos casais. Nessa altura, já existem 3 casais adultos e dois casais filhotes. E assim por diante. Veja a tabela abaixo:

Mês	*Casais Adultos*	*Casais Jovens*	*Total*
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6	5	3	8
7	8	5	13
8	13	8	21

A seqüência de Fibonacci é constituída pelos totais de casais, isto é, os números: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

- Como construir **triângulos pitagóricos** usando os números de Fibonacci:

Já sabemos que um triângulo pitagórico é um triângulo retângulo cujos lados são números inteiros. Então num triângulo retângulo de lados **s** e **t** e a hipotenusa **h**, aplica-se o teorema de Pitágoras, obtendo: $s^2 + t^2 = h^2$.

Podemos então, gerar triângulos pitagóricos utilizando 2 números de Fibonacci. Tomemos, por exemplo, os seguintes números de Fibonacci: 1, 2, 3, 5 . Podemos chamar aos 2 primeiros números de a e b. Como eles são termos da sucessão de Fibonacci, o próximo número irá ser a soma dos 2 anteriores, a+b, e o número seguinte é b+(a+b) = a+2b.

a	**b**	**a+b**	**a+2b**
1	2	3	5

Então, podemos construir um triângulo pitagórico da seguinte forma:

1 – Multiplicar os dois números do meio (2 x 3 = 6);

2 – Duplicar o resultado (6 x 2 = 12). Este resultado é um dos lados, s, do triângulo pitagórico;

3 – Multiplicar os dois números dos extremos (1 x 5 = 5). Este é o segundo lado, t, do triângulo pitagórico;

4 – O terceiro lado, a hipotenusa, obtém-se somando o quadrado dos dois números do meio ($2^2 + 3^2 = 13$).

Assim geramos o triângulo pitagórico de lados **(5, 12, 13).**

* Esse método pode ser aplicado a quaisquer dois números a e b, embora os terceiro e quarto números tenham de se calcular através da regra de Fibonacci, ou seja, somar os dois últimos números para obter o seguinte.

Outro exemplo: Escolhendo-se dois outros números da seqüência de Fibonacci, porém agora, não sendo 2 valores consecutivos, como no exemplo acima. Então podemos ter os valores **1** e **3** na seqüência, como sendo **a** e **b**:

a	**b**	**a+b**	**a+2b**
1	3	4	7

Então, podemos construir um triângulo pitagórico como no exemplo anterior:

1 – Multiplicando os dois números do meio e dobrando o resultado, temos: (3 x 4 = 12 x 2 = **24**).

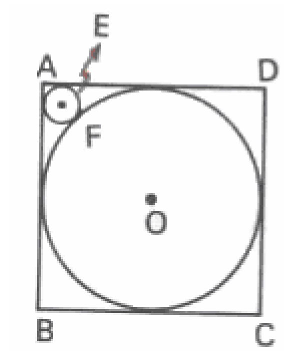
2 – Mutiplicando os extremos da tabela tem-se: (1 x 7 = **7**).

3 – E somando o quadrado dos dois números do meio ($3^2 + 4^2 =$ **25**).

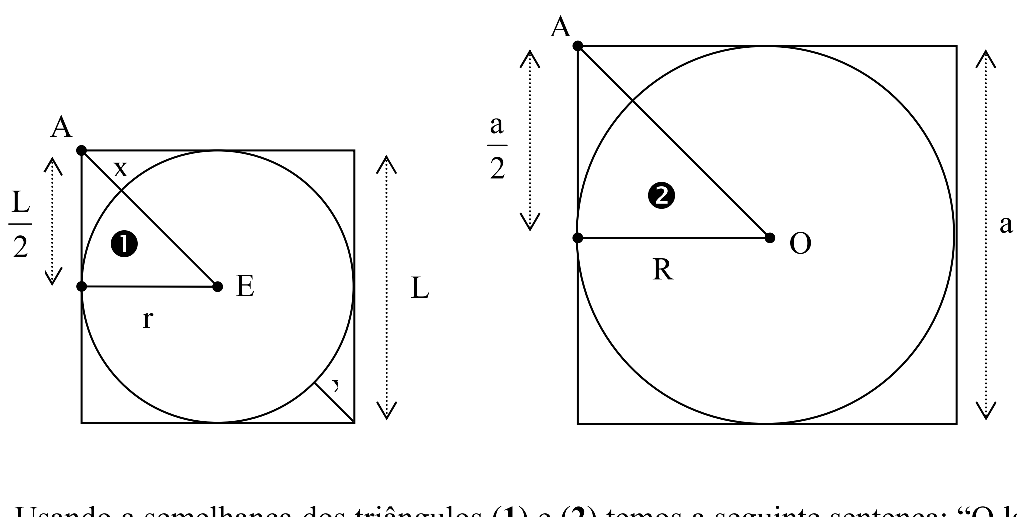
Assim geramos mais um triângulo pitagórico de lados **(7, 24, 25).**

3.3.7. *EXERCÍCIOS*

1 – Consideremos dois círculos tangentes como na figura abaixo. Sendo *E* o centro do círculo menor, *F* o ponto de tangência entre os dois círculos e *a* o lado do quadrado, determine o raio do círculo menor em função de *a*.



Solução: Pegando a pequena circunferência e fazendo um quadrado circunscrito a ela. Esse quadrado pequeno terá como lado L. Utilizando o triângulo retângulo da extremidade desse quadrado até o centro E da circunferência de raio r tem-se como lado desse triângulo retângulo (**1**) o valor $\frac{L}{2}$ e usando o triângulo retângulo do quadrado maior até o centro O da circunferência de raio R tem-se como lado desse triângulo retângulo (**2**) o valor de $\frac{a}{2}$.



Usando a semelhança dos triângulos (**1**) e (**2**) temos a seguinte sentença: "O lado do triângulo retângulo (**1**) está para o raio r assim como o lado do triângulo retângulo (**2**) está para o raio R". Então:

$$\frac{\frac{L}{2}}{r} = \frac{\frac{a}{2}}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{L}{2}}{r} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{2} = r \quad \Rightarrow \quad L = 2r$$

A diagonal do quadrado menor é : [sendo x o valor das partes da diagonal que não estão compreendidos na circunferência de centro E]

$$D = L\sqrt{2}$$
$$2r + 2x = L\sqrt{2}$$
$$2\,(r + x) = (2r)\sqrt{2}$$
$$r + x = r\sqrt{2}$$
$$x = r\,(\sqrt{2} - 1)$$

Pegando-se agora, a metade da diagonal do quadrado maior (*D'*) temos:

$$D' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

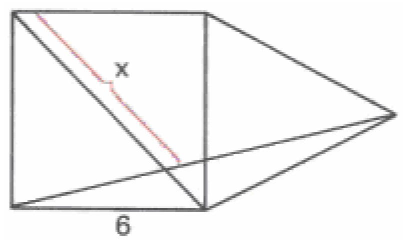
E assim: $R + 2r + x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{a}{2} + 2r + r\left(\sqrt{2} - 1\right) = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \leftrightarrow \quad 2r + r\,(\sqrt{2} - 1) = \frac{a}{2}\sqrt{2} - \frac{a}{2}$$

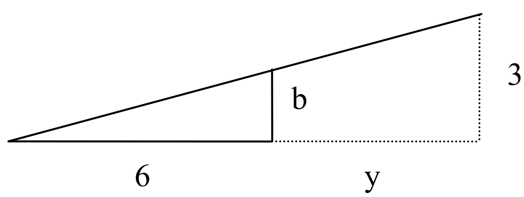
$$r \,.\left[2 + \left(\sqrt{2} - 1\right)\right] = \frac{a}{2}\,(\sqrt{2} - 1) \quad \leftrightarrow \quad r = \frac{\frac{a}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)}{\sqrt{2} + 1} \,.\, \frac{\left(\sqrt{2} - 1\right)}{\left(\sqrt{2} - 1\right)} = \boxed{\frac{a}{2} \,.\, \left(3 - 2\sqrt{2}\right)}$$

Logo, o raio do círculo, em função de a, é igual a $\dfrac{a}{2} \,.\, \left(3 - 2\sqrt{2}\right)$.

2 – Na figura abaixo temos um quadrado e um triângulo eqüilátero. Determine a incógnita, **x** .



Solução: Descendo um tracejado da ponta do triângulo eqüilátero e se ligando com o prolongamento da base do quadrado, forma-se um triângulo retângulo de base *y*, altura *3* e hipotenusa *6* . O que aplicando o teorema de Pitágoras acha-se o valor de y sendo $3\sqrt{3}$. Do mesmo tracejado obtém-se um triângulo maior com a mesma altura de 3 e base, agora, de 6 + y , como abaixo:

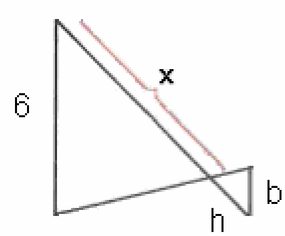


Fazendo a semelhança de triângulos retângulos teremos:

$$\frac{3}{6+3\sqrt{3}} = \frac{b}{6} \quad \Rightarrow \quad b\,(6+3\sqrt{3}) = 18 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{18}{3(2+3\sqrt{3})}$$

$$b = 6\,(2-\sqrt{3})$$

Agora faz-se a semelhança dos 2 triângulos mostrado na figura:



$$\frac{x}{6} = \frac{h}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{6} = \frac{h}{6\,(2-\sqrt{3})} \quad \Rightarrow \quad 6\,(2 - \sqrt{3}\,)\,x \ = \ 6\,h$$

$$h \ = \ (2 - \sqrt{3}\,)\,x$$

Agora, sabendo que $x + h = D$, sendo D a diagonal do quadrado, temos:

$$x + (2 - \sqrt{3}\,)\,x \ = \ 6\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x\,(1 + 2 - \sqrt{3}\,) \ = \ 6\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x\,(3 - \sqrt{3}\,) = 6\sqrt{2}$$

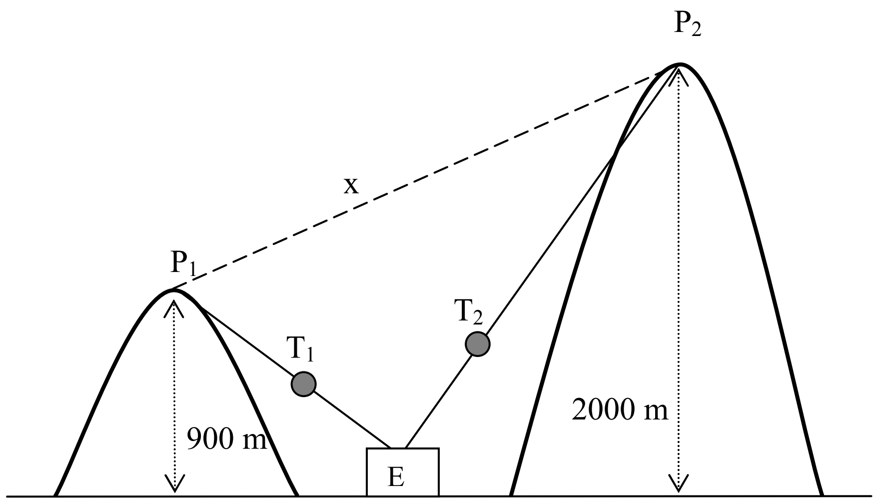
$$x \ = \ \frac{6\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}$$

Racionalizando encontra-se o valor para x, sendo: $x = \boxed{3\sqrt{2} \ + \ \sqrt{6}}$

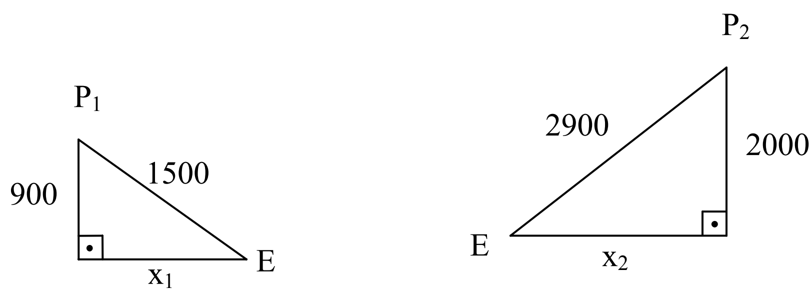
3 – Dois teleféricos T_1 e T_2 partem de uma estação E situada num plano horizontal, em direção aos picos P_1 e P_2 de duas montanhas. Determine a distância entre P_1 e P_2, sabendo que os teleféricos percorreram 1500m e 2900 m, respectivamente, e que a primeira montanha tem 900m de altura e a segunda 2000m e que os pés da montanha e E estão em linha reta.

<u>Solução</u>: A primeira coisa que tem que se notar é que a estação E tem 2 possibilidades onde pode estar localizada: (**A**) Entre as montanhas e (**B**) Ao lado da montanha menor.

(**A**) <u>Entre as montanhas</u>: Teremos 2 triângulos retângulos, sendo o 1º em relação ao P_1 e o 2º em relação ao P_2.



Então:

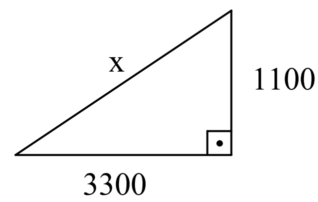


Aplicando o teorema de Pitágoras nos dois triângulos retângulos acima encontramos o valor de x_1 e x_2 que são as distâncias dos respectivos sopés das montanhas até a estação E .

* $1500^2 = 900^2 + x_1^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 = 1440000 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1200$

* $2900^2 = 2000^2 + x_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_2^2 = 4410000 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 2100$

Agora façamos um triângulo retângulo no qual a base será a soma de x_1 e x_2. A hipotenusa é a distância x que queremos saber (distância entre os picos das montanhas) e a altura será a diferença das alturas entre as duas montanhas:

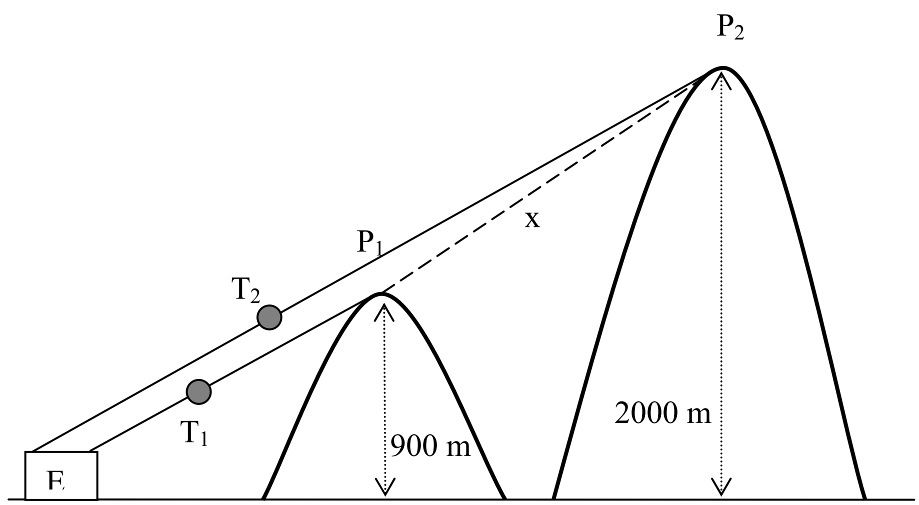


$x^2 = 1100^2 + 3300^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 . \, 1100^2 + (3 \, . \, 1100)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = (3^2 + 1) \, . \, 1100^2$

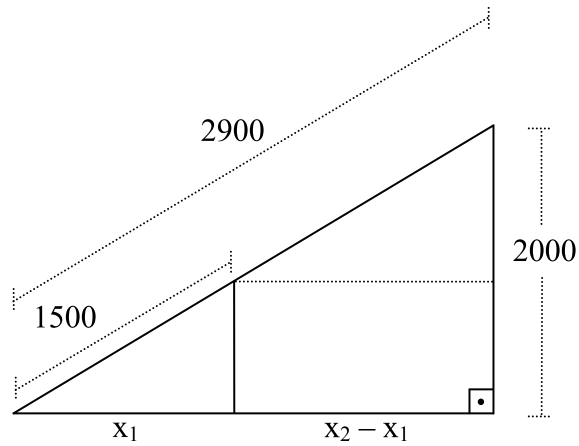
$\Leftrightarrow \quad x^2 = 10 \, . \, (2^2 \, . \, 5^2 \, . \, 11)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1100\sqrt{10}$ ou $\mathbf{x \approx 3478 \ m}$

Ou seja, *a distância entre os picos P_1 e P_2 é de aproximadamente 3478 m*, caso a estação esteja entre as duas montanhas.

(**B**) <u>Ao lado da montanha menor</u>: Teremos 2 triângulos retângulos, sendo o 1º em relação ao P_1 e o 2º em relação ao P_2 .



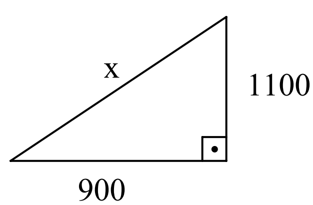
Então:



Aplicando o teorema de Pitágoras em ambos os triângulos, como no caso anterior, os valores de x_1 e x_2 serão os mesmos de antes. Porém agora não somaremos x_1 e x_2, mas sim, queremos o valor de $x_2 - x_1$.

Como $x_1 = 1200$ e $x_2 = 2100$. Teremos para $x_2 - x_1$ o valor de 900.

Agora, aplicando esse valor no triângulo retângulo obtido pelo desenho acima



$x^2 = 1100^2 + 900^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = (2^2 . 5^2 . 11^2)^2 + (2^2 . 3^2 . 5^2)^2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = 2^4 . 5^4 . 11^2 + 2^4 . 3^4 . 5^4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2^4 . 5^4 . (11^2 + 3^4)$

$\Leftrightarrow \quad x = 2^2 . 5^2 . \sqrt{11^2 + 3^4} \quad \Leftrightarrow \quad x = 100\sqrt{202}$ ou $\mathbf{x \approx 1421\ m}$

Ou seja, a *distância entre os picos P_1 e P_2 é de aproximadamente 1421 m*, caso a estação esteja ao lado da montanha menor, porém sem estar entre as duas montanhas

4. ÁREAS DE SUPERFÍCIES PLANAS

4.1. ***Áreas de Superfícies Planas***

4.1.1. *Definição*

Área de uma superfície limitada é um *número* real positivo associado à superfície de forma tal que:

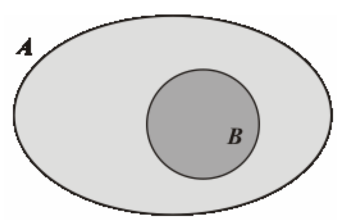
* Às superfícies equivalentes estão associadas áreas iguais (números iguais) e reciprocamente.

$$A \approx B \iff (\text{Área de } A = \text{Área de } B)$$

* A uma soma de superfícies está associada uma área (número) que é a soma das áreas das superfícies parcelas.

$$(C = A + B) \Rightarrow (\text{Área de } C = \text{Área de } A + \text{Área de } B)$$

* Se uma superfície *está contida* em outra, então sua área é *menor* (ou igual) que a área da outra.



$$B \subset A \Rightarrow \text{Área de } B \leq \text{Área de } A$$

4.1.2. *Razão entre retângulos*

a) Teorema

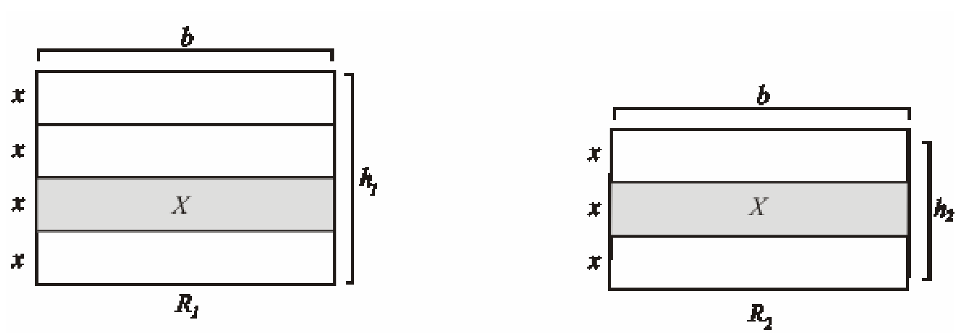
"A razão entre dois retângulos de bases congruentes (ou alturas congruentes) é igual à razão entre suas alturas (ou bases)."

Hipótese *Tese*

$$\begin{cases} R_1\ (b, h_1) \\ R_2\ (b, h_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{h_1}{h_2} \end{cases}$$

Demonstração

<u>1º caso</u>: h_1 e h_2 são comensuráveis.



Então, existe um submúltiplo de h_1 e de h_2.

$$\left.\begin{array}{l} h_1 = p \cdot x \\ h_2 = q \cdot x \end{array}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow} \frac{h_1}{h_2} = \frac{p}{q} \qquad \textbf{(1)}$$

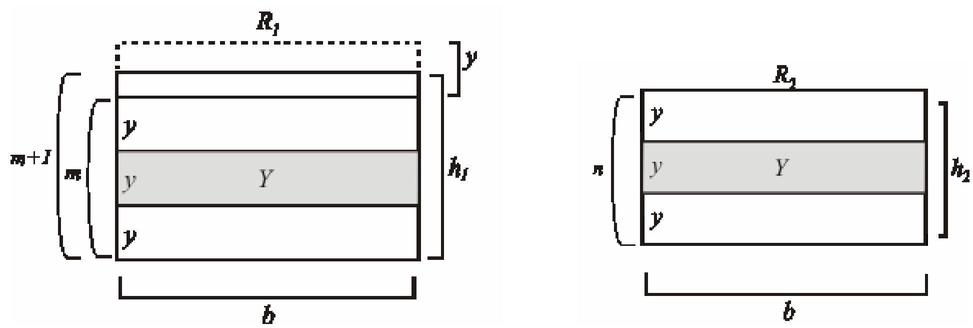
Construindo os retângulos X (b,x), temos:

$$\left.\begin{array}{l} R_1 = p \cdot X \\ R_2 = q \cdot X \end{array}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow} \frac{R_1}{R_2} = \frac{p}{q} \qquad \textbf{(2)}$$

De **(1)** e **(2)** vem:

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{h_1}{h_2}}$$

<u>*2º caso*</u>: h_1 e h_2 são incomensuráveis.



Então, não existe segmento submúltiplo comum de h_1 e h_2 .

Tomemos um segmento *y* submúltiplo de h_2 (y "cabe" um certo número inteiro *n* de vezes em h_2, isto é, $h_2 = ny$).

Por serem h_1 e h_2 incomensuráveis, marcando sucessivamente *y* em h_1, temos que, para um certo número inteiro *m* de vezes:

$$my < h_1 < (m + 1)y$$

Operando com as relações acima, vem:

$$\left.\begin{array}{l} m \,.\, y < h_1 < (m+1)\,.\, y \\ n \,.\, y = h_2 = n \,.\, y \end{array}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow} \frac{m}{n} < \frac{h_1}{h_2} < \frac{m+1}{n} \qquad \textbf{(3)}$$

Construindo os retângulos Y(b, y), temos:

$$\left.\begin{array}{l} m \,.\, Y < R_1 < (m+1) \,.\, Y \\ n \,.\, Y = R_2 = n \,.\, Y \end{array}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow} \frac{m}{n} < \frac{R_1}{R_2} < \frac{m+1}{n} \qquad \textbf{(4)}$$

Ora, sendo y submúltiplo de h_2, pode variar; dividindo y aumentamos n e nestas condições, $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$ formam um *par de classes contíguas* que definem um *único número real*, que é $\frac{h_1}{h_2}$ pela expressão (3) e é $\frac{R_1}{R_2}$ pela expressão (4) .

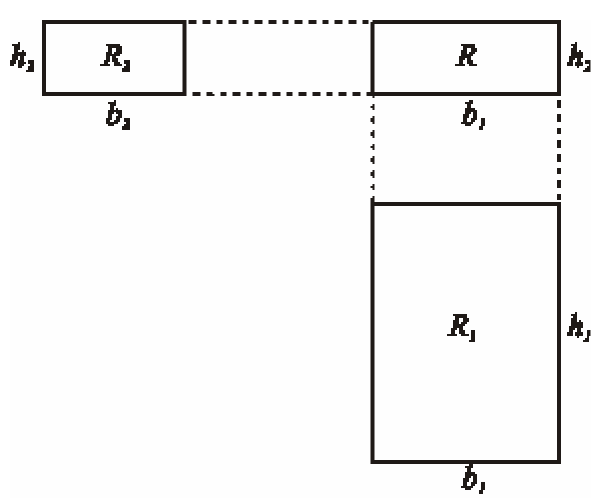
Como esse número é *único*, então: $\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{h_1}{h_2}}$

b) Teorema

"A razão entre dois retângulos quaisquer é igual ao produto da razão entre as bases pela razão entre as alturas".

Hipótese *Tese*

$$\left.\begin{array}{l} R_1\,(b_1, h_1) \\ R_2\,(b_2, h_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}$$



Demonstração

Construamos um retângulo auxiliar $R(b_1, h_2)$. Aplicando duas vezes o teorema anterior, vem:

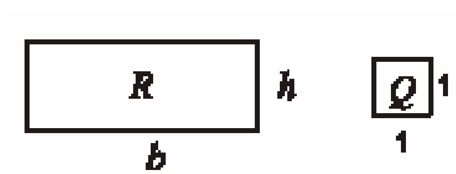
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{R_1}{R} = \dfrac{h_1}{h_2} \\[2ex] \dfrac{R}{R_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \end{array}\right\} \overset{\text{multiplicando}}{\Rightarrow} \dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \cdot \dfrac{h_1}{h_2}$$

4.2. *Áreas de Polígonos*

4.2.1. *Retângulo*

Dado o retângulo *R(b, h)* e fixado o quadrado *Q(1, 1)* como unitário, temos:

$$\text{Área do retângulo } R(b, h) = A_R = \frac{R(b,\ h)}{Q(1,\ 1)}$$



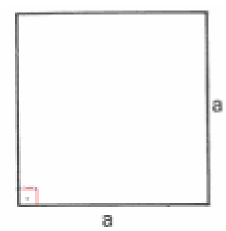
Em vista do item 4.1.2 , vem:

$$A_R = \frac{R(b,\ h)}{Q(1,\ 1)} = \frac{b}{1} \cdot \frac{h}{1} \quad \Rightarrow \quad A_R = (\text{medida de b}) \cdot (\text{medida de h})$$

Que será representada simplesmente por: $\boxed{A_R = b \cdot h}$

4.2.2. *Quadrado*

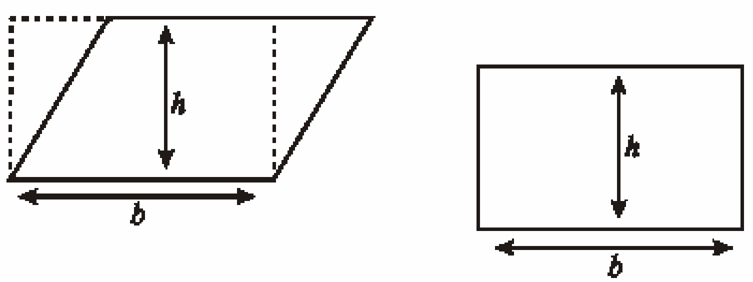
Dado um quadrado de lado a, $Q(a, a)$, temos:



$A_Q = a \cdot a \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_Q = a^2}$, pois o quadrado é um retângulo particular.

4.2.3. *Paralelogramo*

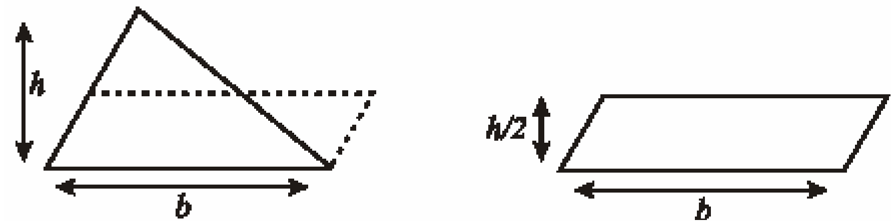
Dado o paralelogramo *P(b, h)*, ele é equivalente a um retângulo cuja base mede *b* e altura mede *h*. Logo:



$$A_P = A_R \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_P = b \cdot h}$$

4.2.4. *Triângulo*

Dado o triângulo *T(b, h)*. Ele é equivalente a um paralelogramo cuja base mede *b* e altura mede $\frac{h}{2}$. Isso devido o teorema que diz: "*Dois paralelogramos de bases e alturas respectivamente congruentes são equivalentes*." . Logo:



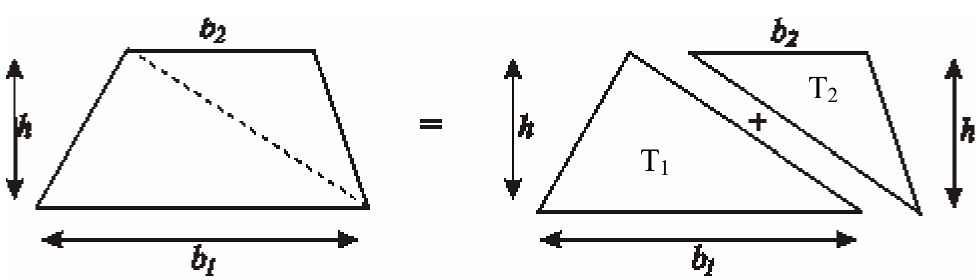
$$A_T = A_P \Rightarrow A_T = b \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow \boxed{A_T = \frac{b \cdot h}{2}}$$

Nota: A área de um triângulo eqüilátero de lado *a*, tem altura $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ e sua área S é então:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$$

4.2.5. *Trapézio*

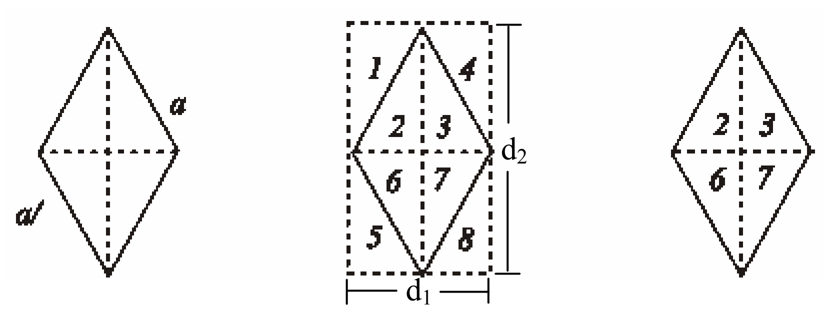
Dado o trapézio $T_{ra}(b_1, b_2, h)$, ele é a soma de dois triângulos $T_1(b_1, h)$ e $T_2(b_2, h)$.



$$A_{Tra} = \frac{b_1 \cdot h}{2} + \frac{b_2 \cdot h}{2} \Rightarrow \boxed{A_{Tra} = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}}$$

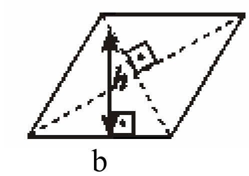
4.2.6. *Losango*

Dado o losango *L(d_1, d_2)*, conduzimos as diagonais e, pelos vértices, as paralelas às diagonais.



$$A_L = A_{(4\ \text{triângulos})} = \frac{A_{(8\ \text{triângulos})}}{2} \Rightarrow \boxed{A_L = \frac{d_1\ .\ d_2}{2}}$$

Nota: O losango é paralelogramo e por tanto sua área também é dada por:

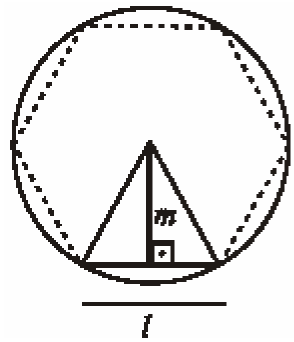


$$\boxed{A_L = b\ .\ h}$$

4.2.7. *Polígono Regular*

Sendo: n = número de lados , m = medida do apótema

l = medida do lado , p = semiperímetro



Seja um polígono regular de n lados de medidas iguais a l e de apótema de medida m .

Podemos decompor esse polígono em n triângulos de base l e altura m .
Então:

$$\left.\begin{array}{l} A_{pol} = n \,.\, A_T \\ A_T = \dfrac{\quad .\, m}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A_{pol} = \dfrac{n \,.\, \overset{2p}{\quad} .\, m}{2}$$

Sendo $n \,.\, l = 2p$ (perímetro), vem:

$$A_{pol} = \frac{2 \,.\, p \,.\, m}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_{pol} = p \,.\, m}$$

Nota: Um hexágono regular de lado a é a reunião de 6 triângulos eqüiláteros de lado a .

Sendo $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ a área do triângulo, temos:

$$A_{hexágono} = 6 \,.\, S \quad \Rightarrow \quad A_{hexágono} = 6 \,.\, \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_{hexágono} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2}$$

4.3. *Área do círculo e de suas partes*

4.3.1. *Área do círculo*

Vimos que a área de um polígono regular é o produto da medida do semiperímetro pela do apótema.

$$A_{pol} = p \cdot m$$

Consideremos as afirmações:

Fixado um círculo, de raio R (diâmetro D), considerando os polígonos regulares inscritos e os circunscritos nesse círculo, com o crescimento do número de lados as áreas dos polígonos se aproximam da área do círculo, assim como os seus perímetros se aproximam do perímetro do círculo e os apótemas se aproximam do raio do círculo. Podemos então colocar, por extensão:

A área do círculo é o produto de seu semiperímetro pelo raio.

$$A_C = \pi R \cdot R = \pi R^2$$

Então:

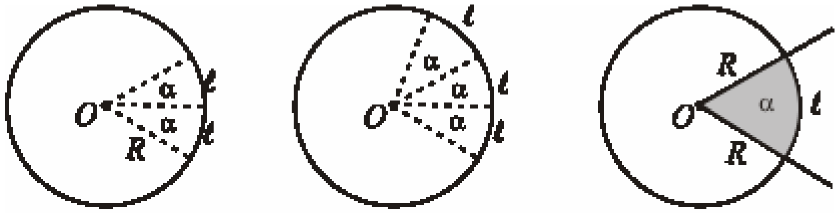
$$\boxed{A_C = \pi \cdot R^2} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{A_C = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^2}{4}}$$

4.3.2. *Área do setor circular*

Notemos que, quando dobramos o arco (ou ângulo central), dobra a área do setor; triplicando-se o arco (ou ângulo central), a área do setor também é triplicada, e assim por diante.

De modo geral, a área do setor é proporcional ao *comprimento do arco* (ou à medida do ângulo central).

Portanto, a área do setor pode ser calculada por uma regra de três simples:



a) Área de um setor circular de raio R e α radianos

$$\left.\begin{array}{lll} 2\pi \text{ rad} & - & \pi R^2 \\ \alpha \text{ rad} & - & A_{setor} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A_{setor} = \frac{\alpha R^2}{2}}$$

b) Área de um setor circular de raio R e α graus

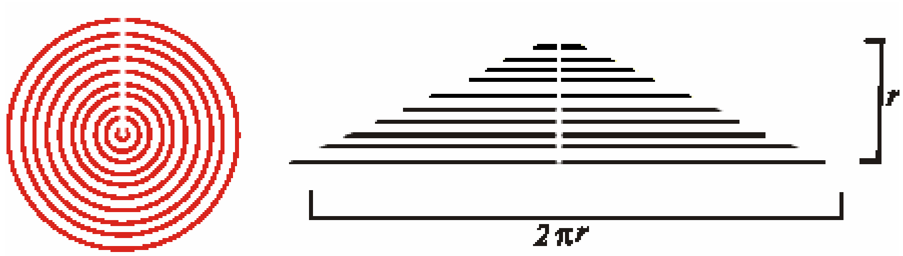
$$\left.\begin{array}{lll} 360^{o} & - & \pi R^2 \\ \alpha^{o} & - & A_{setor} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A_{setor} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}}$$

c) Área de um setor circular em função de R e do comprimento ℓ do arco

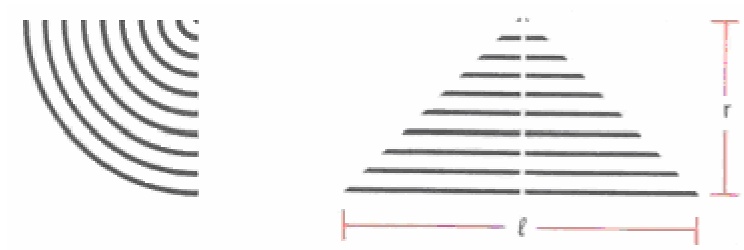
$$\left.\begin{array}{lll} 2\pi R & - & \pi R^2 \\ & - & A_{setor} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A_{setor} = \frac{R}{2}}$$

* ***Observação***:

Note que tanto a área do setor, como a do círculo são análogas à área do triângulo e as figuras abaixo dão idéia disso.



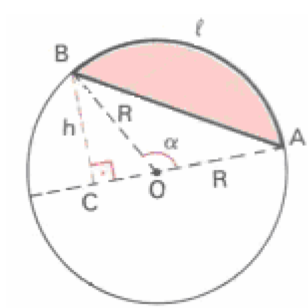
$$A_{círculo} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r \quad \Rightarrow \quad A_{círculo} = \pi r^2$$



$$\boxed{A_{setor} = \frac{1}{2} \quad r}$$

4.3.3. *Área do segmento circular*

Cálculo da área do segmento circular indicado na figura: R é o raio, α é a medida do ângulo central e ℓ é o comprimento do arco.



$A_{segm} = A_{set\ OAB} - A_{\Delta\ OAB}$

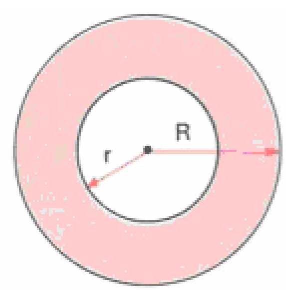
a) Usando o h (que pode ser obtido no Δ OBC)

$$A_{segm} = \frac{R}{2} - \frac{R\ h}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_{segm} = (\quad - h)\,\frac{R}{2}}$$

b) Usando α em radianos

$$A_{segm} = \frac{\alpha R^2}{2} - \frac{1}{2} R\ .\ R\ \mathrm{sen}\,\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_{segm} = \frac{R^2}{2}\,(\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha)}$$

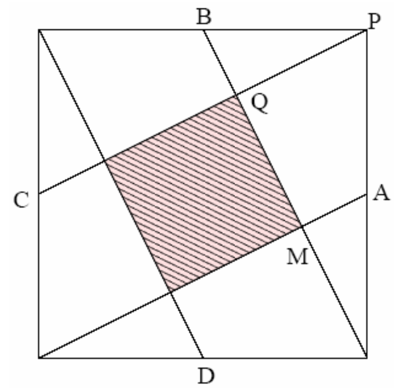
4.3.4. *Área da coroa circular*



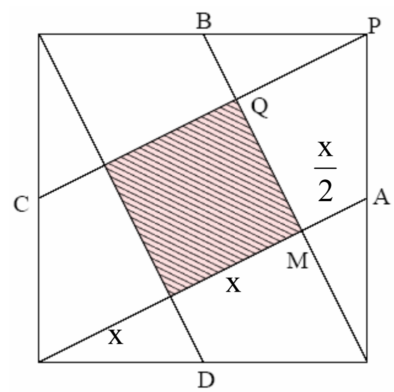
$$A_{coroa} = \alpha\, R^2 - \alpha\, r^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_{coroa} = \alpha\,(R^2 - r^2)}$$

4.3.5. ***EXERCÍCIOS***

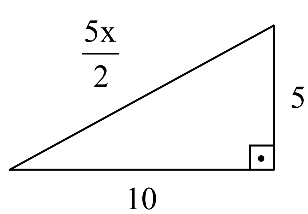
1 - Os pontos A, B, C e D são os pontos médios dos lados do quadrado maior da figura cujo lado mede dez centímetros. Sabendo-se que $PQ = QM$ e $AM = \frac{PQ}{2}$, calcule a área exata do quadrado sombreado.



<u>Solução</u>: Nomeando os lados do quadrado do meio de **x** teremos:



Daí usando o triângulo retângulo da parte inferior da figura, por exemplo, teríamos:



Então resolvendo o teorema de pitágoras:

$$\left(\frac{5x}{2}\right)^2 = 5^2 + 10^2 \quad \Leftrightarrow \quad 25\,x^2 = 4\,.\,(125) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 20$$

E assim, encontra-se o valor para x de $x = \sqrt{20}$.

Como a área do quadrado é o lado ao quadrado:

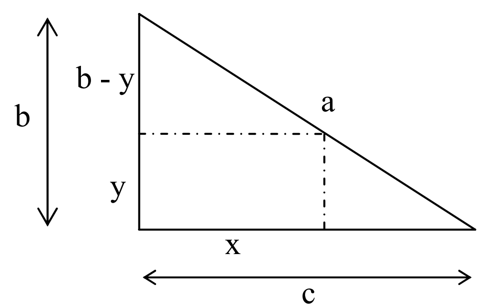
$$A_Q = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad A_Q = \left(\sqrt{20}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad A_Q = 20$$

Logo, a área do quadrado hachurado é de 20 cm^2 .

2 – Numa vidraçaria há um pedaço de espelho sob a forma de um triângulo retângulo, com catetos iguais. Quer-se, a partir dele, recortar um espelho retangular com a maior área possível. A fim de economizar corte, pelo menos um dos lados do retângulo deve estar sobre um dos lados do triângulo.

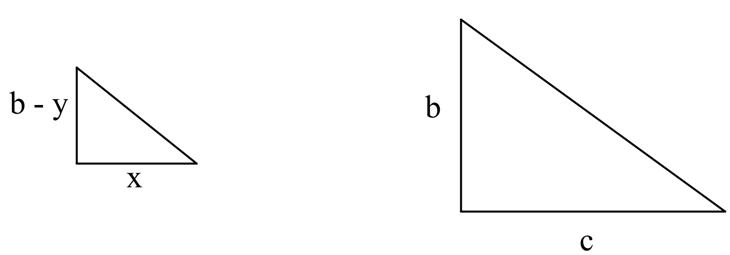
<u>Solução</u>:

* **1º caso**: Utilizando inicialmente o triângulo retângulo com catetos diferentes b e c .



$A_R = x \, . \, y$ $\quad$ (A_R = Área do Retângulo)

De acordo com a semelhança de triângulos, podemos usar o triângulo menor, com altura **b – y**, em relação ao triângulo maior, com altura **b**:



$$\frac{b-y}{b} = \frac{x}{c} \quad \leftrightarrow \quad (b-y)\,.\,c = b\,.\,x \quad \leftrightarrow \quad b-y = \frac{b.x}{c} \quad \leftrightarrow$$

$$(\ast) \quad y = \frac{-b\,.\,x}{c} + b$$

Temos que: $A_R = x\,.\,y \quad \leftrightarrow \quad A_R = x\,.\left(\frac{-bx}{c} + b\right) \quad \leftrightarrow \quad A_R = \frac{-b}{c}x^2 + bx$

Calcularemos, então o valor de x_v (x do vértice), já que ele dará o maior valor possível para x:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \quad \leftrightarrow \quad x_v = \frac{-b}{2\,.\,\frac{-b}{c}} = \frac{c}{2}$$

Ou seja, o retângulo terá maior área tendo o lado **x** exatamente igual a **metade** do lado **c**. Continuando, substituímos o valor máximo de **x** em $\ast$, obtendo:

$$y = \frac{-b\,.\,\frac{c}{2}}{c} + b \quad \leftrightarrow \quad y = \frac{-b\frac{c}{2} + bc}{c} \quad \leftrightarrow \quad y = \frac{bc}{2c} = \frac{b}{2}$$

Da mesma forma, o retângulo terá maior área tendo o lado **y** exatamente igual a metade do lado **b**.

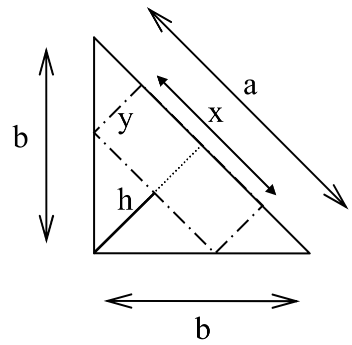
Portanto colocando os valores encontrados de **x** e **y** na fórmula da Área do Retângulo, obteremos:

$$A_R = x\,.\,y = \frac{c}{2}\,.\,\frac{b}{2} = \frac{cb}{4}$$

Como o exercício informa que os catetos do triângulo retângulo são iguais, implica que $b = c$, e assim $\boxed{A_R = \frac{b^2}{4}}$

Agora façamos para o caso do retângulo estar paralelo a hipotenusa.

* **2º caso**:

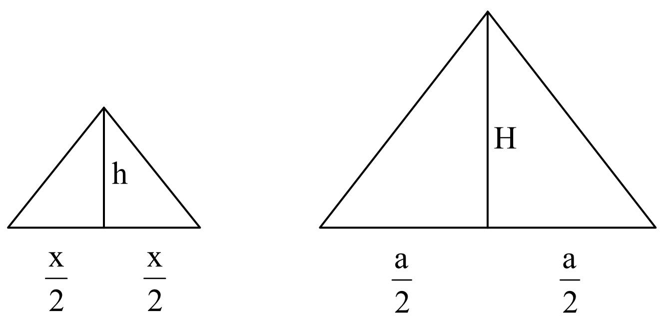


Teremos nesse caso, 2 triângulos isósceles semelhantes.

Chamando de $y + h = H$, teremos pela Média Geométrica:

$$H^2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \quad \leftrightarrow \quad H^2 = \frac{a^2}{4} \quad \leftrightarrow \quad H = \frac{a}{2}$$

Usando-se a semelhança dos 2 triângulos apresentados abaixo, teremos:



$$\frac{h}{x} = \frac{H}{a} \quad \leftrightarrow \quad \frac{h}{x} = \frac{\frac{a}{2}}{a} \quad \leftrightarrow \quad \frac{h}{x} = \frac{1}{2} \quad \leftrightarrow \quad h = \frac{x}{2}$$

Como $y + h = H$: $\quad h = H - y \quad \leftrightarrow \quad \frac{x}{2} = H - y \quad \leftrightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{a}{2} - y$

E assim: $(\ast)$ $y = -\frac{x}{2} + \frac{a}{2}$

Sabe-se que $A_R = x \cdot y$, então, substituindo em y:

$$A_R = x \cdot \left(-\frac{x}{2} + \frac{a}{2} \right) \quad \leftrightarrow \quad A_R = x \cdot \left(\frac{-x+a}{2} \right) \quad \leftrightarrow \quad A_R = -\frac{x^2}{2} + \frac{a\,x}{2}$$

Aplicando-se o $x_v = \dfrac{-b}{2a} \quad \leftrightarrow \quad x_v = \dfrac{-\frac{a}{2}}{2 \cdot -\frac{1}{2}} \quad \leftrightarrow \quad x_v = \dfrac{a}{2}$

Substituindo em (✳) o valor de x encontrado, tem-se:

$$y = \frac{-\frac{a}{2}}{2} + \frac{a}{2} \quad \leftrightarrow \quad y = \frac{-\frac{a}{2} + a}{2} \quad \leftrightarrow \quad y = \frac{a}{4}$$

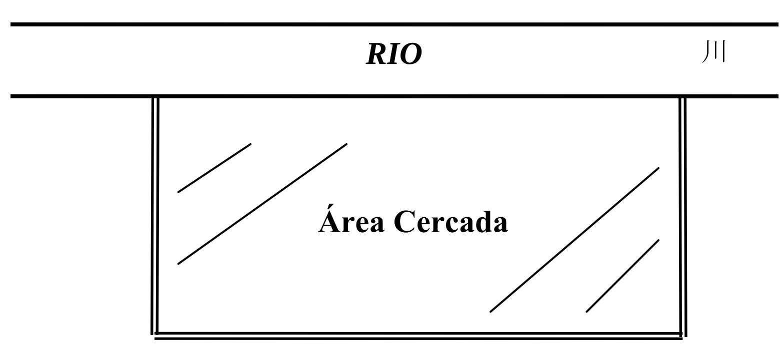
Logo, substituindo na Área do Retângulo: $A_R = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a}{4} = \dfrac{a^2}{8}$

Então, dos 2 casos possíveis apresentados, qual teria a maior área ?

Pelo Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$. Como $b = c$, $a^2 = 2\,b^2$

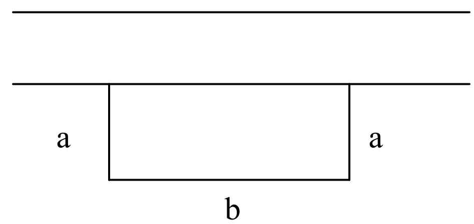
⇨ $\dfrac{a^2}{8} = \dfrac{2b^2}{8} = \dfrac{b^2}{4}$. Ou seja, em **ambos os casos** as áreas são iguais.

3 – Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja circundar uma área retangular junto a um rio para colocar alguns animais.



Quais devem ser as medidas do retângulo para que área cercada seja a maior possível ?.

<u>Solução</u>:



$2a + b = 80 \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{b = 80 - 2a}$

$$A_R = a \cdot b \quad \leftrightarrow \quad A_R = a \,.\, (80 - 2a) \quad \leftrightarrow \quad A_R = -2a^2 + 80a$$

Agora calculando o a_v :

$$a_v = \frac{-b}{2a} \quad \leftrightarrow \quad a_v = \frac{-80}{2\,.\,(-2)} \quad \leftrightarrow \quad a_v = \mathbf{20\ m}$$

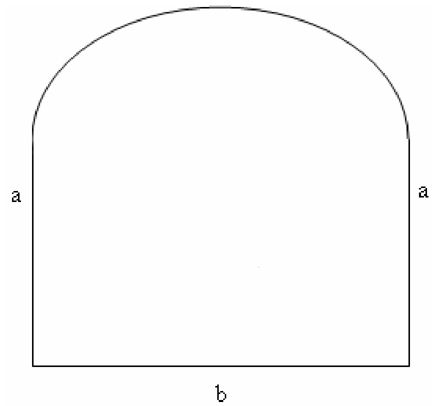
Substituindo em $2a + b = 80$:

$$2 \,.\, 20 + b = 80$$
$$40 + b = 80$$
$$\mathbf{b = 40\ m}$$

Logo, as medidas dos lados da área cercada para que seja a maior possível serão: **20m** e **40 m** .

4 - Uma janela tem a forma de um retângulo tendo em cima um semicírculo (o diâmetro do semicírculo é igual a largura do retângulo). Se o perímetro da janela for 30 pés, encontre as dimensões da janela que deixam passar a maior quantidade possível de luz.

Solução:



$C_{\odot} = \dfrac{2\pi\, r}{2} = \pi\, r = \pi \,.\, \dfrac{b}{2}$ (que é o comprimento da **semi-circunferência** do desenho acima)

Então, o comprimento total da janela será dado por : $2\,a + b + \pi \,.\, \dfrac{b}{2} = 30$

$$2\,a = 30 - b - \pi \,.\, \dfrac{b}{2}$$

$$(\ast) \quad a = 15 - \dfrac{b}{2} - \pi \,.\, \dfrac{b}{2}$$

A Área Total será dada por: $A_T = A_R + \dfrac{A_{\oplus}}{2}$

Obs.: $A_{\oplus}$ = Área da Circunferência.

$$A_T = a \,.\, b + \dfrac{\pi \,.\, \left(\dfrac{b}{2}\right)^2}{2} \quad \leftrightarrow \quad A_T = a \,.\, b + \dfrac{\pi \,.\, b^2}{8}$$

Utilizando o valor de a visto acima na fórmula de A_T temos:

$$A_T = \left(15 - \frac{b}{2} - \frac{\pi b}{4}\right) b + \frac{\pi b^2}{8} \quad \leftrightarrow \quad A_T = 15b - \frac{b^2}{2} - \frac{\pi b^2}{4} + \frac{\pi b^2}{8}$$

$$A_T = 15b - \frac{b^2}{2} + (\pi b^2) \cdot \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \quad \leftrightarrow \quad A_T = -\frac{b^2}{2} + 15b - \frac{1}{8}\pi b^2$$

$$A_T = \left(\frac{-\pi - 4}{8}\right) b^2 + 15b$$

$$b_v = -\frac{b}{2a} \quad \leftrightarrow \quad b_v = \frac{-15}{2 \cdot \left(\frac{-\pi - 4}{8}\right)} \quad \leftrightarrow \quad b_v = \frac{-15}{\frac{-\pi - 4}{4}}$$

$$b_v = -15 \cdot \frac{4}{-\pi - 4} \quad \leftrightarrow \quad b_v = \frac{-60}{-\pi - 4} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{b_v} = \frac{60}{\pi + 4}$$

Agora, substituindo em (✳):

$$a = 15 - \frac{\frac{60}{\pi + 4}}{2} - \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{60}{\pi + 4}\right) \quad \leftrightarrow \quad a = 15 - \frac{30}{\pi + 4} - \frac{15\pi}{\pi + 4}$$

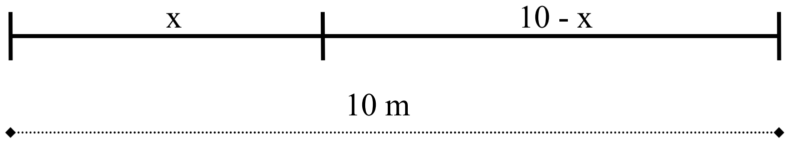
$$a = \frac{15\,(\pi + 4) - 30 - 15\pi}{\pi + 4} \quad \leftrightarrow \quad a = \frac{15\pi + 60 - 30 - 15\pi}{\pi + 4}$$

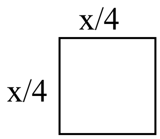
$$\mathbf{a} = \frac{30}{\pi + 4}$$

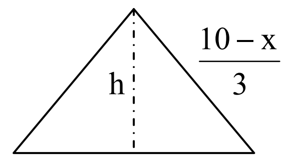
Ou seja, a parte inferior da janela tem que ser um **retângulo com a base sendo o dobro do tamanho das laterais** para se ter a maior entrada de luz.

5 – Um pedaço de fio com 10 metros de comprimento é cortado em 2 partes. Uma parte é dobrada no formato de um quadrado, ao passo que a outra é dobrada em forma de um triângulo eqüilátero. Como deve ser cortado o fio de forma que a área total seja mínima.

<u>Solução</u>:



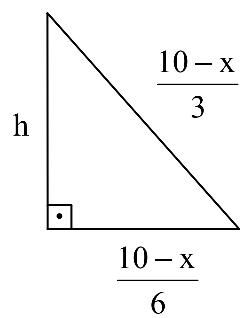




$A_T = A_Q + A_\Delta$, sendo A_Q = Área do Quadrado e A_Δ = Área do Triângulo

$$A_T = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + A_\Delta$$

Aplicando Pitágoras na metade do triângulo, temos:



$$\left(\frac{10-x}{3}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{10-x}{6}\right)^2 \quad \leftrightarrow \quad \frac{100+x^2-20x}{9} = h^2 + \frac{x^2-20x+100}{36} \quad \leftrightarrow$$

$$\frac{100+x^2-20x}{9} - \left(\frac{x^2-20x+100}{36}\right) = h^2 \quad \leftrightarrow \quad \frac{400+4x^2-80x-x^2+20x-100}{36} = h^2$$

$$3x^2 - 60x + 300 = 36\,h^2 \quad \leftrightarrow \quad x^2 - 20x + 100 = 12\,h^2 \quad \leftrightarrow \quad \frac{(10-x)^2}{12} = h^2$$

$$h = \frac{10-x}{\sqrt{12}} = \frac{10-x}{2\sqrt{3}}$$

Portanto, a área do Triângulo Total é: $A_\Delta = b\ .\ h = \dfrac{10-x}{6}\ .\ \dfrac{10-x}{2\sqrt{3}}$

Logo, $A_T = A_Q + A_\Delta$

$$A_T = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{10-x}{6}\ .\ \frac{10-x}{2\sqrt{3}} \quad \leftrightarrow \quad A_T = \frac{x^2}{16} + \frac{(10-x)^2}{12\sqrt{3}} \quad \leftrightarrow$$

$$A_T = \frac{x^2}{16} + \frac{x^2-20x+100}{12\sqrt{3}} \quad \leftrightarrow \quad A_T = \frac{x^2}{16} + \frac{x^2}{12\sqrt{3}} + \frac{20x}{12\sqrt{3}} + \frac{100}{12\sqrt{3}}$$

$$A_T = \frac{x^2}{16} + \frac{x^2}{12\sqrt{3}} - \frac{5x}{3} + \frac{25}{3\sqrt{3}} \quad \leftrightarrow \quad A_T = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{12\sqrt{3}}\right)x^2 - \frac{5}{3\sqrt{3}}x + \frac{25}{3\sqrt{3}}$$

Agora, encontraremos o x_v para o maior comprimento possível:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \quad \leftrightarrow \quad x_v = \frac{\frac{5}{3\sqrt{3}}}{2\ .\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{12\sqrt{3}}\right)} \quad \leftrightarrow \quad x_v = \frac{\frac{5}{3\sqrt{3}}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{6\sqrt{3}}} \quad \leftrightarrow$$

$$x_v = \frac{\frac{5}{3\sqrt{3}}}{\frac{6\sqrt{3}+8}{8\ .\ 6\sqrt{3}}} \quad \leftrightarrow \quad x_v = \frac{5}{3\sqrt{3}}\ .\ \frac{8\ .\ 6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}+8} \quad \leftrightarrow \quad x_v = \frac{80}{6\sqrt{3}+8}\ .\ \frac{6\sqrt{3}-8}{6\sqrt{3}-8}$$

$$x_v = \frac{80\ .\ 6\sqrt{3} - 80\ .\ 8}{36\ .\ 3 - 8^2} \quad \leftrightarrow \quad x_v = \frac{480\sqrt{3} - 640}{44} \quad (\div 2) \quad \leftrightarrow$$

$$x_v = \frac{240\sqrt{3} - 320}{22} \quad (\div 2) \quad \leftrightarrow \quad x_v = \frac{120\sqrt{3} - 160}{11}$$

$\therefore$ **$x_v \approx$ 4,35 metros**

Portanto, o fio deve ser cortado em 4,35 m, sendo que este comprimento será usado para a área do quadrado e o restante para a área do triângulo eqüilátero.

5. ***CONCLUSÃO***

Resolvemos fazer este trabalho envolvendo um assunto que embora simples é bastante interessante, a geometria plana, assunto lecionado no segundo ano do ensino médio.

Optamos por não colocar toda a abrangência do estudo da geometria plana, tendo em vista a extensão de tal assunto; portanto escolhemos trabalhar com triângulos retângulos, polígonos regulares, circunferências e suas respectivas áreas.

Além de propriedades envolvendo tais figuras geométricas resolvemos também colocar um pouco da parte histórica, que no nosso ponto vista foi bastante proveitoso; afinal durante toda a graduação pouco se fala sobre a história da matemática.

Descobrimos algumas curiosidades na parte histórica como a maneira com a qual os matemáticos antigos faziam para a aproximação do número pi, além de algumas curiosidades com relação à geometria em si, relacionando os números de Fibonacci com os triângulos pitagóricos.

Uma das partes bem interessantes do nosso trabalho foi que ao procurar na internet encontramos uma animação convincente para a afirmação do teorema de pitágoras que diz “A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa” que seria uma boa animação para convencer os alunos do ensino médio que o teorema de pitágoras é válido, pelo menos intuitivamente.

Acreditamos que o objetivo de um trabalho de conclusão de curso, no nosso ponto de vista foi alcançado, que seria aprender a redigir uma monografia e não a sua complexidade no assunto.

6. ***REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS***

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Campinas, SP. Editora da Unicamp, 2004.

DOLCE, Osvaldo e José Nicolau Pompeo. *Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo, SP. 7 ed. Editora Atual, 1999.

http://portaleducacional.com.br/redirecionamento.asp?idpublicação=3234 [10/09/2005]

http://roble.pntic.mec.es/~jarran2/cabriweb/1triangulos/pitag22.htm [10/09/2005]

http://www.mat.ufg.br/docentes/jhcruz/ensino/pitagoras.pdf [10/09/2005]

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm31/curiosidade4.htm [20/10/2005]

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm41/suc-fib.htm [20/10/2005]

http://www.ufrn.br/sites/olimpiadadematematica/notas_aula/nota_aula_03.pdf [05/04/2006]